LH 5.7

Implisitte funksjoner

Hvis $x_1, \ldots, x_m, y$ er relatert ved en likning $f(x_1, \ldots, x_m, y) = 0$ ⊛

kan vi forsøke å løse for y

$$y = g(x_1, \ldots, x_m)$$

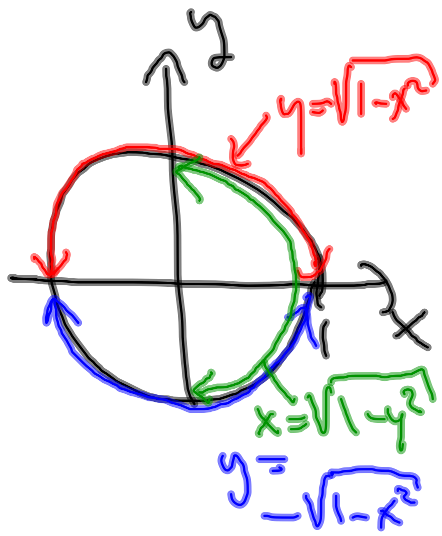
slik at

$$f(x_1, \ldots, x_m, g(x_1, \ldots, x_m)) = 0.$$

Sier da at $y = g(x_1, \ldots, x_m)$ er implisitt gitt av ⊛.

<u>Eks</u> Hvis $x = x_1$ og y oppfyller

$$x^2 + y^2 = 1$$



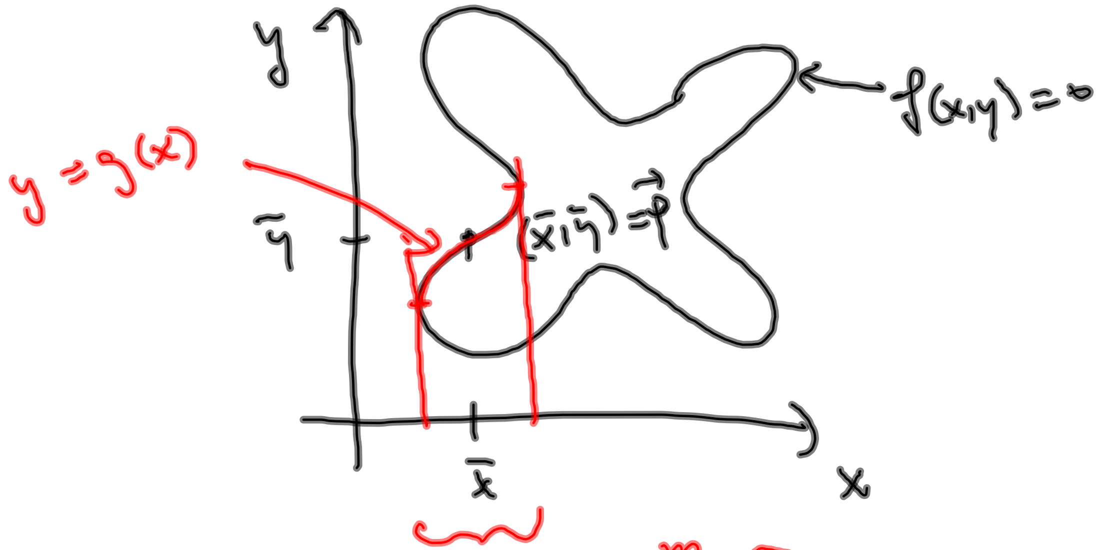
(med $f(x,y) = x^2+y^2-1$)

er $y = g(x) = \sqrt{1-x^2}$

en mulig løsning:

$$f(x,g(x)) = x^2 + (\sqrt{1-x^2})^2 - 1 = 0.$$

Eks



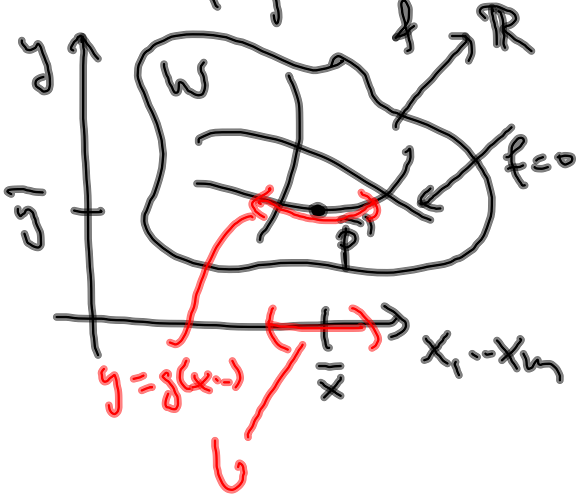
$$\mathbb{R} \xleftarrow{\;g\;} U \subset \mathbb{R}^m = \mathbb{R}$$

Implisitt funksjonsteorem 5.7.3

Gitt $W \subset \mathbb{R}^{m+1}$ åpen

$f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ kontinuerlige partielle deriverte

$\vec{p} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{y}) \in W$ med $f(\vec{p}) = 0$



Anta

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{p}) \neq 0 .$$

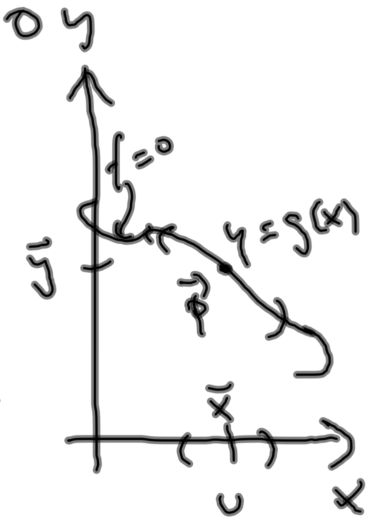
Da finnes åpen $U \subseteq \mathbb{R}^m$

med $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in U$

og en deriverbar funksjon $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$

slik at $g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) = \bar{y}$

og $f(x_1, \dots, x_m, g(x_1, \dots, x_m)) = 0$ for alle $(x_1, \dots, x_m) \in U$.



Videre er

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) = \div \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{p})}{\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{p})}$$

for $1 \leq i \leq m$.

Bevis-skisse

Hvis $f(x_1, \dots, x_m, g(x_1, \dots, x_m)) = 0$

vil
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$$

ved kjerneregelen, så

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = - \frac{\partial f / \partial x_i}{\partial f / \partial y}.$$

Det implisitte funksjonsteoremet for $f: W \to \mathbb{R}$ følger fra det omvendte funksjonsteoremet for $\vec{F}: W \to \mathbb{R}^{m+1}$ gitt ved

$$\vec{F}(x_1, \dots, x_m, y) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ f(x_1, \dots, x_m, y) \end{bmatrix}$$

med
$$\vec{F}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & & & \frac{\partial f}{\partial x_m} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

som er invertibel $\iff \frac{\partial f}{\partial y} \neq 0.$

Hvis $\vec{G}$ er den omvendte funksjonen til $\vec{F}$ kan vi skrive

$$\vec{G}(z_1, \dots, z_m, w) = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \\ h(z_1, \dots, z_m, w) \end{bmatrix}$$

for en egnet h, og

da er

$$g(x_1, \dots, x_m) = h(x_1, \dots, x_m, 0),$$

den ønskede funksjonen $\square$

<u>Eks 4</u> Gass

$$\left\{\begin{array}{ll} p & \text{trykk} \\ T & \text{temperatur} \\ V & \text{volum} \end{array}\right.$$

$$(p, V, T) \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$f(p, V, T) = 0$$

$$pV = kT$$

$$f(p, V, T) = pV - kT$$

Eks $x, y > 0$ relatert ved

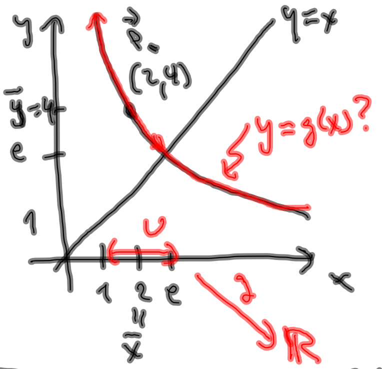
$$\left(e^{y\ln x} =\right) x^y = y^x \left(= e^{x\ln y}\right)$$

dvs. $f(x,y) = x^y - y^x = 0$

Kan forsøke å løse for $y = g(x)$.

Triviell løsning $y = x$. Også andre løsninger

$2^4 = 16 = 4^2$ $f(2,4) = 0$.



Siden $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{y\ln x} - e^{x\ln y}\right)(x,y)$$

$$= (\ln x)x^y - \left(\frac{x}{y}\right)y^x \leftarrow$$

er f.eks. $\frac{\partial f}{\partial y}(2,4) = \ln 2 \cdot 2^4 - \frac{2}{4}\cdot 4^2$
$= 16(\ln 2 - 1/2) > 0$

$e < 4$
$e^{1/2} < 2$
$\frac{1}{2} < \ln 2$

Altså finnes en åpen $U \subset \mathbb{R}$ med $\bar{x} = 2 \in U$ og en deriverbar $g : U \to \mathbb{R}$ med $f(x, g(x)) = 0$ for $x \in U$

$$\iff \quad x^{g(x)} = g(x)^x \quad \text{for } x \in U.$$

Har $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x}\cdot x^y - \ln y \cdot y^x$

Så $\frac{\partial f}{\partial x}(2,4) = \frac{4}{2}\cdot 16 - \ln 4 \cdot 16$
$= 16(2 - \ln 4)$

og

$$\frac{\partial g}{\partial x}(2) = -\frac{\partial f/\partial x\,(2,4)}{\partial f/\partial y\,(2,4)}$$

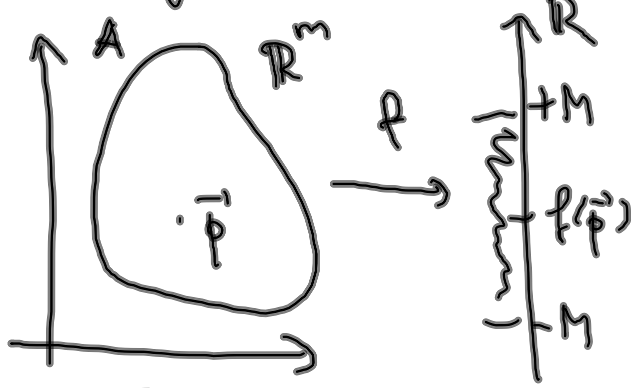
$$= -\frac{16(2-\ln 4)}{16(\ln 2 - \frac{1}{2})} = \frac{(2-\ln 4)}{(\frac{1}{2} - \ln 2)}$$

$$\approx -3.1774 < 0.$$

LH 5.8 Ekstremverdisetningen

La $A \subseteq \mathbb{R}^m$

$f: A \to \mathbb{R}$



Def

f er <u>oppad begrenset</u> hvis $\exists M$ slik at $f(\vec{x}) \leq M$ for alle $\vec{x} \in A$.

f er <u>nedad begrenset</u> hvis $\exists M$ slik at $-M \leq f(\vec{x})$ for alle $\vec{x} \in A$.

f er <u>begrenset</u> hvis $\exists M \in \mathbb{R}$ slik at $|f(\vec{x})| \leq M$ for alle $x \in A$.

$\vec{p} \in A$ er et (globalt) <u>maksimumspunkt</u>

hvis $f(\vec{x}) \le f(\vec{p})$ for alle $\vec{x} \in A$.

$\vec{q} \in A$ er et (globalt) <u>minimumspunkt</u>

hvis $f(\vec{q}) \le f(\vec{x})$ for alle $\vec{x} \in A$.

<u>Setning 5.82</u> La A være lukket, begrenset og ikketom. Anta at $f : A \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig. Da finnes $\vec{p}, \vec{q} \in A$ slik at

$$f(\vec{q}) \le f(\vec{x}) \le f(\vec{p})$$

for alle $\vec{x} \in A$.

Bevis-skisse

Anta at f ikke er oppad begrenset.
For hver $n \in \mathbb{N}$ finnes $\vec{x}_n \in A$ med

$$f(\vec{x}_n) \geq n \,.$$

Følgen $\{\vec{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$ i A har en konvergent delfølge (B.-W. sats)

$$\vec{x}_{n_k} \longrightarrow \vec{p} \in A \quad \text{når } k \to \infty$$

der $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$

Da må

$$n_k \leq f(\vec{x}_{n_k}) \longrightarrow f(\vec{p}) \in \mathbb{R}$$
$$\text{når } k \to \infty$$

siden f er kontinuerlig.
Umulig, siden $n_k \to \infty$ når $k \to \infty$.

$\boxed{\smile}$

LH 5.9 Maksimums- og minimumspunkter

La $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: A \to \mathbb{R}$

Def $\vec{p} \in A$ er et <u>lokalt maksimumspunkt</u> hvis $\exists r > 0$ slik at

$$f(\vec{x}) \leq f(\vec{p})$$

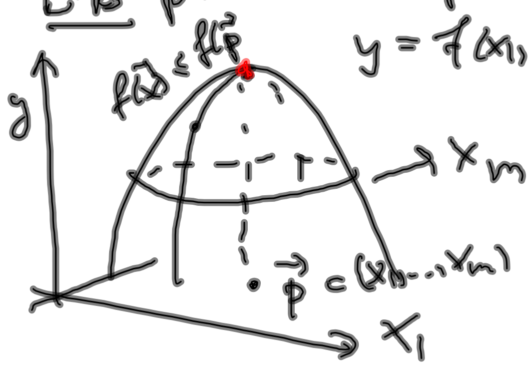
for alle $\vec{x} \in A$ med $|\vec{x} - \vec{p}| < r$.

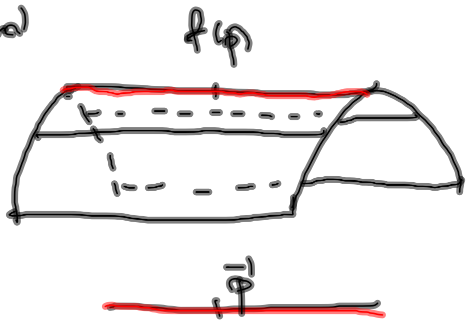
$\vec{p} \in A$ er et <u>lokalt minimumspunkt</u> hvis $\exists r > 0$ slik at

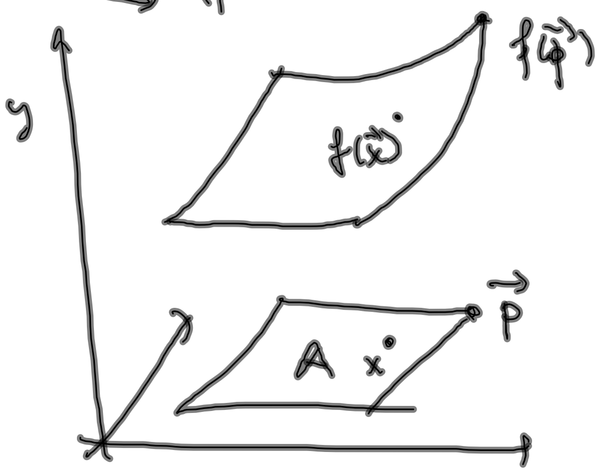
$$f(\vec{p}) \leq f(\vec{x})$$

for alle $\vec{x} \in A$ med $|\vec{x} - \vec{p}| < r$.

<u>Eks</u> på lok. makspkt:







Def $\vec{p} \in A$ er et <u>sadelpunkt</u> hvis $\forall r > 0 \ \exists \vec{x}, \vec{y} \in A$ med $|\vec{x} - \vec{p}| < r$ og $|\vec{y} - \vec{p}| < r$ og

$$f(\vec{x}) < f(\vec{p}) < f(\vec{y}).$$

<u>Setning 5.9.2</u> Dersom $f: A \to \mathbb{R}$ har et lokalt maksimum (eller et lokalt minimum) i $\vec{p} \in A$, $\vec{p}$ er et indre punkt i A, og f er deriverbar i $\vec{p}$, så er $\nabla f(\vec{p}) = \vec{0}$

$\iff \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{p}) = 0$ for $1 \leq i \leq m$.

<u>Def</u> Hvis $\nabla f(\vec{p}) = 0$ sier vi at $\vec{p}$ er et <u>stasjonært punkt</u> for f.

<u>Bevis</u> For hver $1 \leq i \leq m$ kan vi se på funksjonen $\vec{p} = (p_1, \dots, p_m)$

$$x_i \longmapsto f(p_1, \dots, p_{i-1}, x, p_{i+1}, \dots, p_m)$$
$$= g(x)$$

som har et lokalt maksimum i $x = p_i$.

Fra envariabelteorien er $g'(p_i) = 0$,

men $g'(p_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{p})$.

Eks $A = \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = x^3 - 3x - y^2$$

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3, -2y)$$

Hvis $(x,y) = \vec{p}$ er et lokalt ekstrempunkt

må $\nabla f(\vec{p}) = \vec{0} \iff \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$

$\iff (x,y) = (1,0)$ eller $(-1,0)$.