John Rognes
2011

Flervariabel analyse med lineær algebra

av

Tom Lindstrøm og Klara Hveberg

Matematisk institutt
og
Senter for matematikk for anvendelser (CMA)
Universitetet i Oslo

Descartes (1637)
Leibniz (1684)
Newton (1687)

Forord

Som tittelen sier, handler denne boken først og fremst om flervariabel analyse, altså om det som har å gjøre med derivasjon og integrasjon av funksjoner av flere variable. For den som ikke kjenner stoffet fra før, kan dette virke som et begrenset og litt kjedelig tema, men det er slett ikke tilfellet — tvert i mot er denne teorien grunnlaget for de aller fleste anvendelsene av matematikk i naturvitenskap og samfunnsfag. Nesten alle interessante fenomener i den virkelige verden avhenger av mer enn én variabel størrelse, og når slike fenomener skal analyseres, er det flervariabel analyse som er redskapet, gjerne i kompaniskap med lineær algebra.

Noe av det som skiller denne boken fra de fleste (men slett ikke alle) andre, er at den tar forholdet til lineær algebra på alvor — i tillegg til alle de vanlige temaene i flervariabel analyse, inneholder boken også en fullverdig innføring i lineær algebra i $\mathbb{R}^n$. Det er to grunner til dette. For det første gir lineær algebra oss et språk som gjør det mye enklere å uttrykke en del grunnleggende prinsipper i flervariabel analyse — formlene blir kortere, de geometriske tolkningene blir naturligere og sammenhengen med de tilsvarende prinsippene i én-variabel analyse kommer klarere frem. Den andre grunnen er at dagens datateknologi gjør det mulig å bruke numeriske metoder til å løse problemer i flervariabel analyse som tidligere var utilgjengelige, og at disse problemene som regel må omformuleres til problemer i lineær algebra før de kan løses numerisk. Samspillet mellom flervariabel analyse og lineær algebra har derfor mye større praktisk betydning enn tidligere, og det er viktig at studentene fra starten av får se den flervariable analalysen i en språkdrakt som ligger så nær opptil lineær algebra som mulig.

En annen ting som skiller denne boken fra mange andre, er at den tar numeriske metoder på alvor. De fleste moderne bøker i flervariabel analyse bruker dataverkøy til graftegning og symbolbehandling, men vi tar ett skritt videre og oppmuntrer studentene til å lage egne programmer i MATLAB eller Python som en naturlig del av oppgaveløsningen. Man kan godt bruke boken uten å la studentene programmere selv, men matematisk programmering er blitt en del av hverdagen i mange fag, og det er en fordel at studentene blir kjent med de grunnleggende programmeringsverktøyene og programmeringsteknikkene mens de lærer matematikken. Vi har valgt MATLAB som hovedprogram siden det har en dominerende posisjon i mange anvendte miljøer, men siden MATLAB-lisenser er forholdsvis dyre, har vi laget et alternativt opplegg med gratisprogrammet Python (se studieboken). Vektleggingen av numeriske metoder har også fått konsekvenser for

– n

innholdet i boker — kapittel 5 gir en innføring i iterative metoder som er atskillig grundigere enn det som er vanlig for en bok av denne typen.

En tredje ting som skiller denne boken fra de fleste andre, er at den tar teorien på alvor. Med unntak av noen få avanserte teoremer i vektoranalysen, blir alle resultater fullstendig bevist, og for interesserte og ambisiøse studenter kan boken derfor fungere som en første innføring i reell analyse. For å få et teoretisk grunnlag for studiet av iterasjoner, innledes for eksempel kapittel 5 med en grundig behandling av kompletthet av $\mathbb{R}^n$. Vi er imidlertid fullstendig klar over at ikke alle studenter vil ha behov eller forutsetninger for å lese alt, og vi har derfor supplert de formelle bevisene med fyldige, intuitive forklaringer. De mest kompliserte bevisene (som beviset for spektralteoremet i kapittel 4, beviset for Kantorovitsj' teorem i kapittel 5 og beviset for skifte av variabel i dobbeltintegraler i kapittel 6) er så lange og kompliserte at man sannsynligvis ikke bør prøve å dekke dem i undervisningen, men overlate dem til selvstudium for engasjerte studenter. Uansett bør man være klar over at boken forutsetter at studentene har vært gjennom en litt teoribetont versjon av én-dimensjonal kalkulus. Av naturlige grunner er vår standardreferanse Tom Lindstrøm: *Kalkulus*, Universitetetsforlaget, 2006, men mange andre innføringsbøker vil gjøre samme nytten.

Forklare at x-[illegible] [illegible] ex (hva?).–

I tillegg til det som er nytt, dekker denne boken alle de tradisjonelle temaene i flervariabel analyse, og vi har lagt vekt på å finne frem til anvendelser som illustrerer teorien og som viser hvordan den brukes i andre fag. Oppgaver er en viktig del av enhver matematikkbok, og vi har vært så heldige å få bruke gamle eksamensoppgaver fre Universitetet i Oslo. Det er mye godt å si om den "norske" tradisjonene med lange, flerleddede oppgaver som gjør det mulig å lede studentene frem til nye resultater og troverdige anvendelser, og som gir dem en forsmak på hva det vil si å bruke matematikk i større prosjekter.

×

Undervisningsopplegg

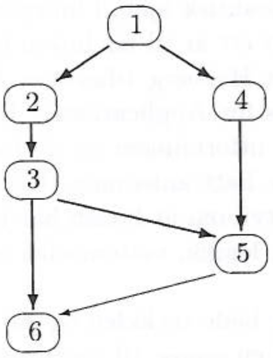
Flervariabel analyse er en stor suksess — nesten alle kvantitative fag ønsker at deres studenter skal få en innføring i emnet. På mange måter er denne suksessen også emnets største problem, fordi det er så mange forskjellige interessenter som ønsker at "deres" temaer skal behandles så inngående og så tidlig som overhodet mulig. Sammen med én-variabel analyse og lineær algebra utgjør flervariabel analyse den "grunnpakken" av matematikkunnskaper som de fleste realfags-, økonomi- og ingeniørstudenter trenger, men der de to andre fagområdene gjerne får lov til å utvikle seg i fred og fordragelighet, er det ofte et stort ytre press på den flervariable analysen — noen fagområder vil ha linjeintegraler så fort som mulig, for andre er multiple integraler atskillig viktigere, mens atter andre er mest opptatt av å få optimeringsteorien på plass. Samtidig faller emnet vanskelig for mange studenter, og det er ikke nødvendigvis slik at den mest logiske stoffrekkefølgen

(?)

også er den mest pedagogiske.

For at boken skal kunne tilpasses ulike behov, har vi prøvd å bygge den opp slik at kapitlene kan gjennomgås i forskjellige rekkefølger. Ved Universitetet i Oslo har vi gjerne undervist kapitlene i rekkefølgen 1-2-3-6-4-5 fordi andre fag er interessert i å få den multiple integrasjonen i kapittel 6 så tidlig som mulig. Ønsker man å bevise alle resultatene i full detalj, betyr dette at man mangler noen redskaper fra kapittel 5 (spesielt uniform kontinuitet) i kapittel 6, men i praksis er dette sjelden noe problem. En annen mulighet er å velge rekkefølgen 1-4-2-3-~~4~~-5-6 slik at man får hele den lineære algebraen først.

Stoffrekkefølgen vi har valgt i boken, kan noen steder virke unaturlig. Hvorfor har vi for eksempel fordelt lineær algebra på kapittel 1 og 4 og ikke bare samlet alt i begynnelsen av boken, og hvorfor har vi valgt å utsette en del stoff om følger og kontinuitet til kapittel 5 når det logisk sett kunne ha passet vel så godt i kapittel 2? Vi har prøvd å følge tre grunnleggende prinsipper: For det første har vi prøvd å bygge opp stoffet i en logisk rekkefølge slik at vi har redskapene på plass når vi trenger dem. For det andre ønsker vi å nå frem til en del sentrale resultater så raskt som mulig — inklusjonen av lineær algebra gjør at vi i begynnelsen bruker lenger tid på å bygge opp teorien enn andre bøker, og erfaringen viser at det kan være lurt å dele opp lineær algebra i to deler slik at man kan komme relativt raskt frem til de resultatene i flervariabel analyse som ikke forutsetter dypere kjennskap til matriser og lineære ligningssystemer. For det tredje har vi ønsket å spre de teoretiske vanskelighetene slik at vi ikke får lange partier som faller tungt for mange studenter — selv om en del av stoffet i begynnelsen av kapittel 5 passer godt inn i kapittel 2, innser vi at kapittel 2 allerede er så pass teoritungt at det kan være lurt å la stoffet synke litt før vi går videre. inn



Som sagt har man stor frihet til å bytte om på stoffrekkefølgen i undervisningen. Figuren viser den logiske sammenhengen mellom kapitlene. Den tynne pilen fra 5 til 6 viser teoretiske avhengigheter som sannsynligvis ikke vil spille noen særlig rolle i praksis (i Oslo har vi som nevnt pleid å undervise kapittel 6 før kapittel 5).

Også MATLAB kan integreres i undervisningen på en fleksibel måte. Ved Universitetet i Oslo har vi av praktiske årsaker ventet med MATLAB-opplæringen til slutten av kapittel 2, og det har fungert utmerket. Siden MATLAB er et matrisebasert program, vil nok de fleste uansett vente med å innføre programmet til de har introdusert matriser i seksjon 1.5. Den systematiske innføringen i MATLAB er lagt til et appendiks (skrevet i samarbeid med Øyvind Ryan) som kan innpasses i undervisningen når man selv ønsker, men vi har supplert denne innføringen med korte bemerkninger i hovedteksten for å vise koblingen mellom MATLAB og de matematiske temaene. I enkelte seksjoner i kapittel 4 og 5 spiller MATLAB-programmer en mer sentral rolle i utforskingen av iterative systemer.

Takk

har

Med unntak av noen få seksjoner er alle deler av denne boken vært brukt i undervisningen ved Universitetet i Oslo. Det er en stor glede å takke alle kolleger og studenter som har gitt tilbakemelding på ulike versjoner, eller som har hjulpet til med kommentarer og innspill, spesielt Erik Bedos, Inger Christin Borge, Geir Dahl og Øyvind Ryan. Vi har hatt mye hjelp, støtte og inspirasjon av prosjektet "Computers in Science Education" (CSE) der vi spesielt har lyst til å takke Knut Mørken. Alle som arbeider med matematikkundervisning ved Universitetet i Oslo, vil skjønne hvorfor vi takker Elisabeth Seland — det er hun som sørger for at vi aldri stivner der vi er, men at vi alltid får den lille dosen av entusiasme, idealisme og realisme som skal til for å gå ett (eller to eller tre) skritt videre. En tidligere versjon av de to første kapitlene har ligget på nettet som tilleggskapitler til *Kalkulus*, og det er en glede å takke Universitetsforlaget for at vi får lov til å bruke dette stoffet her i omarbeidet form. Sist, men ikke minst, vil vi takke Morten Fuglevand i Pearson Education for all praktisk hjelp i innspurten — hadde ikke han puffet litt, ville det nok ha tatt ett år til før boken ble ferdig!

Da vi begynte på boken, var Klara Hveberg tilknyttet CSE gjennom sitt arbeid ved "Centre of Mathematics for Applications". Hun var aktivt med i planleggingen av prosjektet og i utformingen av de første kapitlene og appendikset, men har dessverre ikke hatt anledning til å være med på sluttføringen av arbeidet. Det er ingen tvil om at boken har tapt på det — Klara har en enestående sans for språk, logikk, matematikk og pedagogikk som ville ha hevet ethvert prosjekt!

Ingen bok er perfekt, alle inneholder både trykkfeil og det som verre er. Finner du noe som bør rettes opp, send en e-post til *lindstro@math.uio.no*.

Blindern, 10. juni, 2010

Tom Lindstrøm

Innhold

Kapittel 1

Vektorer og matriser

Tall spiller en sentral rolle i matematikken — så sentral at mange nok vil si at der det er tall, er det matematikk, og der det ikke er tall, er det ikke matematikk! Fullt så enkelt er det ikke — det finnes mange grener av matematikken der tall spiller en underordnet rolle — men det er likevel ikke til å komme forbi at tall er et av fagets aller viktigste bestanddeler.

I din tidligere matematikkutdanning har du lært å regne med mange slags tall: hele tall, desimaltall, brøker, irrasjonale tall og til og med komplekse tall. I dette kapitlet skal vi gå et skritt videre og regne med tupler av tall, det vil si med flere tall på en gang. Du har vært borti dette tidligere når du har regnet med vektorer i planet og i rommet — en vektor $[x, y]$ i planet er et 2-tuppel, mens en vektor $[x, y, z]$ i rommet er et 3-tuppel. Vi skal nå gå videre og regne med n-tupler for alle naturlige tall n. Hvis du tenker geometrisk, kan dette høres skummelt ut — hvordan skal man kunne forestille seg en 4-dimensjonal vektor $[x, y, z, u]$? Tenker du mer algebraisk, er det ikke noe skummelt i det hele tatt; et 4-tuppel $[x, y, z, u]$ er bare en notasjon for å holde styr på fire tall på en praktisk og kortfattet måte. I dette kapitlet skal vi utvikle både algebra og geometri, for selv om det å regne algebraisk med tupler er trygt og ukomplisert, mister man fort oversikten, og den gjenvinner man først når man lærer å tenke på tupler som geometriske objekter.

(x, y)

(x, y, z)

$(x, y, z, u) \times 2$

Vi skal også gå et skritt videre og arbeide med matriser. Dette er rektangulære oppsett av tall som f.eks.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 12 \\ \frac{3}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

Tegnsetting i display?

Ved hjelp av matriser kan vi "transformere" n-tupler på en måte som er viktig i svært mange sammenhenger, både regneteknisk og geometrisk. Matriser og tupler kommer til å spille en sentral rolle også i senere kapitler, dels som nyttige verktøy og dels som selvstendige studieobjekter.

1.1 Algebra for n-tupler

La oss begynne med den grunnleggende definisjonen. Et *n-tuppel* er et uttrykk $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ der $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er reelle tall. Vi ser at $(2, -1, 7, 3)$ er et 4-tuppel, mens $(0, 1, \pi, \frac{3}{2}, -7, 3)$ er et 6-tuppel. To n-tupler $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ og $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ regnes som like dersom de inneholder de samme tallene i samme rekkefølge, dvs. hvis $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $\ldots$, $a_n = b_n$. Legg merke til at $(3, 2, 4) \neq (2, 3, 4)$; selv om tallene er de samme, er rekkefølgen forskjellig.

I denne boken skal vi bruke bokstaver i **fete typer** som navn på n-tupler, f.eks. $\mathbf{a} = (-2, 3, 0, -17)$. Det er vanskelig å bruke fete typer når man skriver for hånd, og man kan da isteden skrive en pil eller en strek over bokstavene; dvs. $\vec{a} = (-2, 3, 0, -17)$ eller $\bar{a} = (-2, 3, 0, -17)$.

Vi skriver $\mathbf{0}$ for det n-tuplet som har alle komponenter lik 0, altså $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. Hvis vi har et n-tuppel $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, skriver vi $-\mathbf{a}$ for n-tuplet $(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$.

Det er en naturlig måte å definere addisjon og subtraksjon av n-tupler på. Dersom $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, så er

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

og

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n)$$

Vi sier at vi adderer og subtraherer *komponentvis.* Legg merke til at vi bare kan addere og subtrahere tupler med like mange komponenter — oppskriften ovenfor gir oss ikke noen måte å addere et 3-tuppel og et 7-tuppel på. Før vi ser på et eksempel, tar vi med en regneoperasjon til. Dersom s er et tall og $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ er et n-tuppel, definerer vi produktet av s og $\mathbf{a}$ til å være

$$s\mathbf{a} = (sa_1, sa_2, \ldots, sa_n)$$

Vi ganger altså s inn i hver komponent i $\mathbf{a}$.

Eksempel 1. Vi lar $\mathbf{a} = (-2, 3, 0, -17)$ og $\mathbf{b} = (4, -1, 3, 17)$. Da er

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (-2 + 4, 3 + (-1), 0 + 3, -17 + 17) = (2, 2, 3, 0)$$

og

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (-2 - 4, 3 - (-1), 0 - 3, -17 - 17) = (-6, 4, -3, -34)$$

Hvis $s = 3$, får vi

$$s\mathbf{a} = (3 \cdot (-2), 3 \cdot 3, 3 \cdot 0, 3 \cdot (-17)) = (-6, 9, 0, -51)$$

♣

Vi skal innføre en regneoperasjon til. Dersom $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ er to n-tupler, definerer vi *skalarproduktet* (også kalt *prikkproduktet*) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ved

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Legg merke til at $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ikke er et n-tuppel, men et tall (eller en *skalar* som man ofte sier når man vil understreke at noe er et tall og ikke et n-tuppel). Hvis vi lar $\mathbf{a} = (-2, 3, 0, -17)$ og $\mathbf{b} = (4, -1, 3, 17)$ som ovenfor, ser vi at

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-2) \cdot 4 + 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 + (-17) \cdot 17 = -8 - 3 + 0 - 289 = -300$$

Vi har nå sett hvordan vi kan regne med n-tupler, og det er kanskje på tide å ta en kikk på noen eksempler som antyder hvorfor det er et poeng med slike regnestykker. Det første eksemplet viser at n-tupler er naturlige redskap når vi skal holde styr på mer informasjon enn det som kan rommes i et enkelt tall, og at regneoperasjonene svarer til regnestykker det ofte er naturlig å utføre i slike sammenhenger.

Eksempel 2. En forretning har ansatt 7 studenter på timebasis. For å holde styr på hvor mange timer hver student har arbeidet så langt, kan vi bruke et 7-tuppel $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_7)$ der t_1 er antall timer den første studenten har arbeidet, t_2 er antall timer den andre studenten har arbeidet osv. Dersom studentene arbeider mer senere, kan vi på samme måte kode tilleggstimene som et 7-tuppel $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_7)$. Det totale antall timer som studentene har arbeidet, er nå gitt ved $\mathbf{t} + \mathbf{s}$.

Studentene har ulik erfaring og derfor ulik lønn. Hvis student nummer én har en timelønn på p_1 kroner, student nummer to har en timelønn på p_2 kroner osv., kan vi også representere lønnen som et 7-tuppel $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_7)$. Dersom studentene har arbeidet $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_7)$ timer, er den totale lønnen som forretningen skylder, gitt av skalarproduktet $\mathbf{p} \cdot \mathbf{t} = p_1 t_1 + p_2 t_2 + \ldots + p_7 t_7$. Dersom alle studentene får et lønnstillegg på 7 prosent, får vi det nye lønnstuplet ved å gange det gamle med skalaren 1.07, altså $1.07\mathbf{p}$. ♣

X

Bruker desimalpunktum!

Vi tar med noen eksempler til som viser hvordan n-tupler brukes til å holde styr på tallmessig informasjon i forskjellige sammenhenger.

i en

Eksempel 3. Tilstanden til en gassbeholder er bestemt av trykket p, temperaturen T og volumet V. Hvis du får i oppdrag å måle tilstanden til beholderen ved forskjellige tidspunkt, kan det være naturlig å bruke 4-tupler $\mathbf{a} = (t, p, T, V)$ der t er tidspunktet for målingen. Forskjellen mellom to målinger $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er da gitt ved differensen $\mathbf{b} - \mathbf{a}$. ♣

(i)

Eksempel 4. Et bilde på en fjernsynsskjerm eller en dataskjerm er bygget opp av små lysende punkter (piksler). Et vanlig format er $1280 \times 1024 = 1310720$ piksler. I hvert punkt må vi angi styrken til hver av de tre grunnfargene rødt, grønt og blått, så totalt har vi $3 \times 1310720 = 3932160$ tall å holde styr på. En naturlig måte å gjøre dette på er å oppfatte bilder som 3932160-tupler! Dette er ikke noe enestående eksempel — i mange anvendelser er man interessert i tupler med svært mange komponenter. ♣

Her er noen enkle regneregler for n-tupler (det finnes flere). Vær oppmerksom på at vi bruker de samme prioriteringsreglene for vektorer som for tall; dersom det ikke står parenteser, skal multiplikasjoner utføres før addisjoner.

Setning 1.1.1 (Regneregler for n-tupler) *Dersom* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *og* $\mathbf{c}$ *er n-tupler og s og t er reelle tall, gjelder følgende regneregler:*

(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

(b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

(c) $s(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = s\mathbf{a} + s\mathbf{b}$

(d) $(s + t)\mathbf{a} = s\mathbf{a} + t\mathbf{a}$

(e) $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$ *og* $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

(f) $(s\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (s\mathbf{b}) = s(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

(g) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$ *med likhet hvis og bare hvis* $\mathbf{a} = \mathbf{0}$

Bevis: Alle disse reglene bevises lett ved å regne ut venstre- og høyresiden og kontrollere at svarene stemmer overens. Vi tar (c) og (g) som eksempler:
(c) Dersom $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, ser vi at venstresiden kan skrives

$$\begin{aligned} s(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= s(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n) \\ &= (s(a_1 + b_1), s(a_2 + b_2) \ldots, s(a_n + b_n)) \\ &= (sa_1 + sb_1, sa_2 + sb_2 \ldots, sa_n + sb_n) \end{aligned}$$

Tilsvarende kan høyresiden skrives

$$\begin{aligned} s\mathbf{a} + s\mathbf{b} &= (sa_1, sa_2 \ldots, sa_n) + (sb_1, sb_2 \ldots, sb_n) \\ &= (sa_1 + sb_1, sa_2 + sb_2, \ldots, sa_n + sb_n) \end{aligned}$$

Siden de to uttrykkene er like, er (c) bevist.
(g) Vi ser at

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$$

siden kvadrater aldri er negative. Likhet har vi dersom $a_1^2 = 0$, $a_2^2 = 0$, ... $a_n^2 = 0$, dvs. dersom $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, ..., $a_n = 0$. □

Vi har hittil skrevet våre n-tupler liggende

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

men vi kan også skrive dem stående

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

I det første tilfellet kaller vi $\mathbf{a}$ en *radvektor*, mens vi i det andre kaller $\mathbf{a}$ en *søylevektor*. I de fleste situasjoner spiller det ingen rolle om vi skriver n-tuplene på den ene eller andre formen, og vi velger da ofte å skrive dem som radvektorer siden det tar minst plass. Det finnes imidlertid tilfeller der det er viktig å skille mellom radvektorer og søylevektorer, men det skal vi komme tilbake til senere — foreløpig kan du skrive dine vektorer på den måten du måtte ønske. Legg for øvrig merke til at det ofte kan være lettere å få øye på strukturen i et regnestykke når du bruker søylevektorer, f.eks. kan

tilfellet

$$s\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_1 + tb_1 + rc_1 \\ sa_2 + tb_2 + rc_2 \\ \vdots \\ sa_n + tb_n + rc_n \end{pmatrix}$$

virke mer oversiktlig enn

$$s(a_1, a_2, \ldots, a_n) + t(b_1, b_2, \ldots, b_n) + r(c_1, c_2, \ldots, c_n) =$$
$$= (sa_1 + tb_1 + rc_1, sa_2 + tb_2 + rc_2, \ldots, sa_n + tb_n + rc_n)$$

La oss avslutte denne seksjonen med noen flere ord om notasjon. Mengden av alle n-tupler kaller vi $\mathbb{R}^n$. Når vi skriver $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, betyr dette derfor ikke noe annet enn at $\mathbf{a}$ er et n-tuppel. Hittil har vi holdt oss til reelle n-tupler, men vi kan selvfølgelig også tenke oss n-tupler $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ der komponentene $c_1, c_2, \ldots, c_n$ er *komplekse* tall. Mengden av alle slike n-tupler kaller vi $\mathbb{C}^n$. Vi skal se nærmere på komplekse n-tupler litt senere. Notasjonen kan også gjøres enda mer generell: Dersom A er en hvilken som helst mengde, betegner A^n mengden av alle n-tupler $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ der $a_i \in A$ for alle $i = 1, 2, \ldots, n$.

(?)

Helt til slutt legger vi merke til at et 1-tuppel (a_1) ikke er noe annet enn et tall inni en parentes. Parentesen spiller ingen rolle (den er bare med for å avgrense uttrykket), og vi skal derfor regne 1-tuplet (a_1) og tallet a_1 som det samme objektet. Dette betyr at $\mathbb{R}^1$ og $\mathbb{R}$ er den samme mengden.

MATLAB-kommentar: For å regne med vektorer i MATLAB, må du første skrive dem inn. Du kan skrive inn radvektorene $\mathbf{a} = (1, -2, 3, 0, 5)$ og $\mathbf{b} = (3, -2,4, -2, 0)$ ved hjelp av kommandoene:

Må ha $b \in \mathbb{R}^5$ for å gi mening til $a+b$.

```
>> a=[1,-2,3,0,5]
>> b=[3,-2,4,-2,0]
```

MATLAB

Legg merke til at vi bruker hakeparenteser [,] og ikke runde parenteser (,) for å beskrive vektorer. Du kan også erstatte kommaene mellom komponentene med mellomrom:

```
>> a=[1 -2 3 0 5]
>> b=[3 -2 4 -2 0]
```

Når vektorene er skrevet inn, kan du regne med dem ved å bruke kommandoer av typen `>>a+b, >>a-b, >>7*a`. Skalarproduktet får du ved å skrive `>>dot(a,b)`. Vil du skrive inn en søylevektor

$$c = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

må du bruke semikolon mellom komponentene:

```
c=[-1;3;2]
```

Oppgaver til seksjon 1.1

1. Finn $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $s\mathbf{a}$ og $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ når $\mathbf{a} = (1, -2, 4, -5, 1)$, $\mathbf{b} = (-3, 5, 5, 0, -3)$ og $s = 3$.

2. Finn $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $s\mathbf{a}$ og $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ når $\mathbf{a} = (7, 0, 4, -2, -5, 4)$, $\mathbf{b} = (0, 2, 1, -6, 0, -1)$ og $s = -4$.

3. Vis at for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ er:

a) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y}$

b) $(\mathbf{x}-\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} - 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \mathbf{y}\cdot\mathbf{y}$

c) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{y}\cdot\mathbf{y}$.

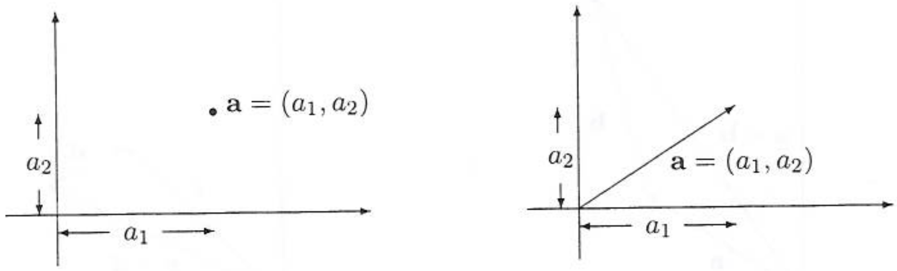
4. Bevis punktene d), e), f) i setning 1.1.1.

5. Et grossistfirma har n vareslag på lager, m_1 enheter av vareslag 1, m_2 enheter av vareslag 2 osv. Verdien av hver enhet er p_1 for vareslag 1, p_2 for vareslag 2 osv. Uttrykk den totale verdien av varelageret som skalarproduktet mellom to n-tupler.

6. Bruk MATLAB til å løse oppgave 1 og 2 ovenfor.

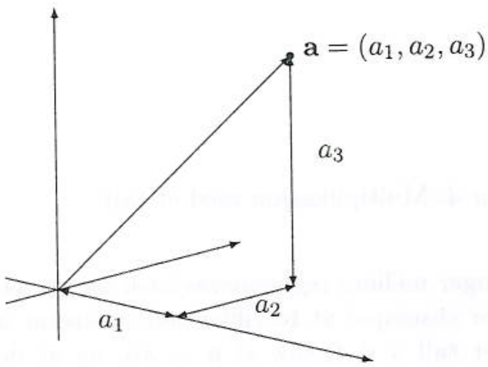
1.2 Geometri for n-tupler

Et 2-tuppel er ikke noe annet enn et par (a_1, a_2). Geometrisk kan vi tenke på et slikt par på to måter — enten som et *punkt* med koordinater a_1 og a_2, eller som en *vektor* (pil) som starter i origo og ender i dette punktet (se figur 1).



Figur 1: **a** som et punkt og som en vektor

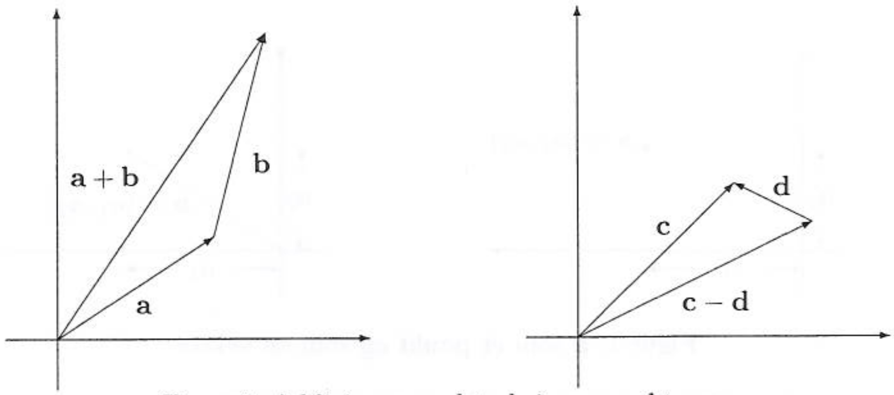
I skolematematikken bruker man gjerne forskjellig notasjon ettersom man tenker på paret som et punkt eller som en vektor — et punkt (a_1, a_2) har runde parenteser, mens en vektor $[a_1, a_2]$ har klammeparenteser. hake Det er ganske tungvint å bruke to forskjellige notasjoner, og vi vil derfor bruke runde parenteser $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ uansett om vi tenker på **a** som et punkt eller som en vektor. Hva som er naturlig, fremgår som regel av sammenhengen. Snakker vi om en linje gjennom **a**, er det naturlig å tenke på **a** som et punkt, men snakker vi om en linje parallell med **a**, er det naturlig å tenke på **a** som en vektor. Når vi lager figurer, vil vi noen ganger tegne paret (a_1, a_2) som en vektor og andre ganger som et punkt, alt etter hva vi synes passer best i hvert enkelt tilfelle (se figur 1).



Figur 2: Et 3-tuppel som en vektor i rommet

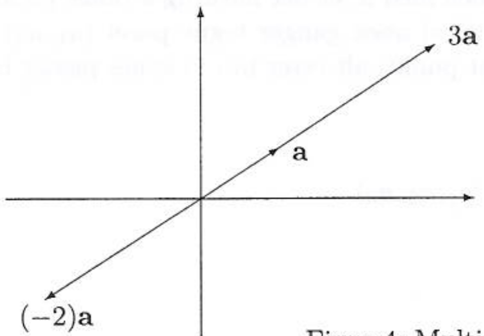
På tilsvarende vis kan vi oppfatte 3-tupler som punkter og vektorer i rommet. Figuren ovenfor viser hvordan et 3-tuppel $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ kan oppfattes som en vektor i rommet.

Som du vet fra skolematematikken, har de algebraiske operasjonene vi innførte i forrige seksjon, en geometrisk tolkning når vi tenker på tupler som vektorer i planet eller rommet. Figur 3 viser hvordan vi får frem addisjon og subtraksjon ved å sette sammen vektorer:



Figur 3: Addisjon og subtraksjon av vektorer

Multiplikasjon med en skalar har også en geometrisk tolkning. Dersom vi ganger $\mathbf{a}$ med et *positivt* tall s, beholder vektoren retningen, men blir s ganger så lang. Dersom vi ganger $\mathbf{a}$ med et *negativt* tall s, snur retningen $180°$, og den nye vektoren blir $|s|$ ganger så lang som den opprinnelige (se figur 4).



Figur 4: Multiplikasjon med et tall

Det er også andre sammenhenger mellom regneoperasjoner og geometri. Fra skolematematikken vet du for eksempel at to (ikke-null) vektorer $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ er parallelle dersom det finnes et tall $s \neq 0$ slik at $\mathbf{a} = s\mathbf{b}$, og at de er ortogonale (dvs. står normalt på hverandre) dersom $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Du vet også at lengden $|\mathbf{a}|$ til vektoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ kan regnes ut fra koordinatene:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

og at det er en sammenheng mellom lengden og skalarproduktet:

$$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$$

Det er sammenhengen mellom geometri og algebra som gir liv til vektorregning i to og tre dimensjoner, og det hadde vært nyttig om vi kunne bruke vår geometriske intuisjon på samme måte når vi arbeidet med generelle n-tupler. Dette kan virke som en uoverkommelig oppgave — hvis 2-tupler representerer 2-dimensjonale objekter i planet, og 3-tupler representerer 3-dimensjonale objekter i rommet, så burde 4-tupler representere 4-dimensjonale objekter i et slags 4-dimensjonalt rom? Og, enda verre, 5-tupler burde representere 5-dimensjonale objekter i et 5-dimensjonalt rom, 6-tupler burde representere 6-dimensjonale objekter i et 6-dimensjonalt rom osv? Hvem av oss kan med hånden på hjertet si at de har noen særlig geometrisk intuisjon for det som skjer i 4-, 5- og 6-dimensjonale rom?

Ikke vel? Spørsmål?

Heldigvis behøver vi ikke å ha en slik intuisjon på forhånd, men kan bygge den opp gradvis. Ideen er enkel: vi overfører geometriske begreper fra planet og rommet til det generelle tilfellet ved å bruke de algebraiske beskrivelsene av geometriske egenskaper. Her er et eksempel: At to vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er ortogonale (dvs. at de står normalt på hverandre), er i utgangspunktet en geometrisk egenskap. Denne egenskapen kan vi beskrive algebraisk ved $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Vi bruker nå denne algebraiske beskrivelsen til å *definere* at to n-tupler $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er ortogonale dersom $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ (vi sier da at de står *normalt på hverandre*). På denne måten får vi innført det geometriske begrepet ortogonalitet i høyere dimensjoner uten å måtte støtte oss til noen geometrisk intuisjon. Når begrepet først er innført på denne måten, kan vi undersøke i hvilken grad det svarer til våre (geometriske) forestillinger om hva ortogonalitet er. På den måten bygger vi etter hvert opp en intuisjon om ortogonalitet av n-tupler, og denne intuisjonen tar fort en geometrisk form.

La oss begynne med litt terminologi: Mengden $\mathbb{R}^n$ av alle n-tupler kalles det *n-dimensjonale euklidske rommet*, og et n-tuppel $\mathbf{a}$ kalles også en *n-dimensjonal vektor* eller et *n-dimensjonalt punkt*. Som i det 2- og 3-dimensjonale tilfellet skal vi ofte bruke ordet "vektor" når det er naturlig å tenke på $\mathbf{a}$ som et geometrisk objekt med lengde og retning, og vi skal bruke ordet "punkt" når vi er opptatt av noe (f.eks. en linje eller et plan) som går gjennom $\mathbf{a}$. Logisk sett er det selvfølgelig unødvendig å ha mer enn ett navn på disse objektene, men pedagogisk er det ofte en fordel å kunne bruke et ord som antyder hvilke egenskaper vi er opptatt av i hver enkelt situasjon. Vi har valgt det nøytrale ordet "n-tuppel" som utgangspunkt for ikke å binde oss for sterkt til den ene eller andre tolkningen.

(ikke standard?)

Hvis $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ er en to-dimensjonal vektor, er lengden gitt ved

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Tilsvarende er lengden til en tre-dimensjonal vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ gitt ved

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

For en n-dimensjonal vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ er det derfor naturlig å definere *lengden* (eller *normen* som den også kalles) ved

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

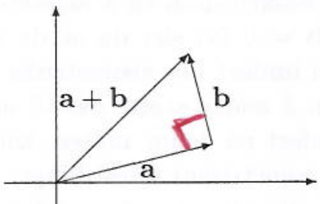
I kapittel 1 definerte vi skalarproduktet av vektorene $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ til å være

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

og vi ser at vi har den vanlige sammenhengen mellom lengden og skalarproduktet:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \qquad \text{eller med andre ord} \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$$

Vi har allerede definert to n-tupler $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ til å være *ortogonale* (eller *stå normalt på hverandre*) dersom $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Ved hjelp av denne definisjonen kan vi formulere en n-dimensjonal versjon av et meget berømt resultat (figur 5 viser den geometriske motivasjonen).



Figur 5: Pythagoras' setning i planet

Setning 1.2.1 (Pythagoras' setning for n-tupler) *Dersom* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *er ortogonale, så er*

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$$

Bevis: Dette er bare et enkelt regnestykke (husk regnereglene for n-tupler fra kapittel 1):

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \\ &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 + 2 \cdot 0 + |\mathbf{b}|^2 = \\ &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 \end{aligned}$$

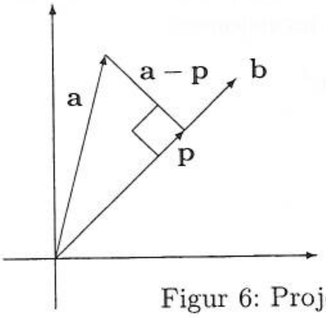
□

Setningen ovenfor er vårt første eksempel på et resultat om n-tupler som er inspirert av en geometrisk observasjon. Vårt neste problem tar utgangspunkt i figur 6. Vi tenker oss at vi er gitt to vektorer $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, og at vi ønsker

(har?)

å finne *projeksjonen* $\mathbf{p}$ av $\mathbf{a}$ ned på $\mathbf{b}$. Dette betyr at $\mathbf{p}$ er vektoren parallell med $\mathbf{b}$ slik at $\mathbf{a}-\mathbf{p}$ står normalt på $\mathbf{b}$.

Unntak hvis $b=0$ (eller $p=0$)?



Figur 6: Projeksjonen $\mathbf{p}$ av $\mathbf{a}$ ned på $\mathbf{b}$

I utgangspunktet er dette en geometrisk problemstilling som bare gir mening for vektorer i planet og rommet, men vi kan bruke vår oversettingsfilosofi til å gi mening til problemet for generelle n-tupler $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$. Siden det n-tuplet $\mathbf{p}$ vi er på jakt etter skal være parallelt med $\mathbf{b}$, må det finnes et tall t slik at $\mathbf{p}=t\mathbf{b}$, og siden $\mathbf{a}-\mathbf{p}$ skal stå normalt på $\mathbf{b}$, må vi ha

$$0=(\mathbf{a}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{b}=(\mathbf{a}-t\mathbf{b})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}-t|\mathbf{b}|^2$$

Løser vi denne ligningen med hensyn på t, får vi

$$t=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2},$$

som betyr at

$$\mathbf{p}=t\mathbf{b}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$$

Vi får dermed dette resultatet:

Hvorfor $a\neq 0$?

Setning 1.2.2 *Anta at* $\mathbf{a}$ *og* $\mathbf{b}$ *er to ikke-null vektorer i* $\mathbb{R}^n$. *Da er projeksjonen* $\mathbf{p}$ *av* $\mathbf{a}$ *ned på* $\mathbf{b}$ *gitt ved:*

$$\mathbf{p}=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$$

Lengden til projeksjonen er $|\mathbf{p}|=\frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|}$.

Bevis: Den første formelen har vi allerede utledet. Den andre kan vi for eksempel finne med følgende regnestykke:

$$|\mathbf{p}|=|t\mathbf{b}|=|t||\mathbf{b}|=\frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|^2}|\mathbf{b}|=\frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|}$$

□

La oss kombinere resultatet vi nettopp har bevist med Pythagoras' setning. Siden $\mathbf{a} - \mathbf{p}$ står normalt på $\mathbf{b}$, må den også stå normalt på $\mathbf{p}$ som er parallell med $\mathbf{b}$ (sjekk dette!). Det betyr at vi kan bruke Pythagoras' setning på vektorene $\mathbf{p}$, $\mathbf{a} - \mathbf{p}$ og $\mathbf{a}$ (se figur 6 for å få intuisjonen):

$$|\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{p}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{p}|^2$$

Siden $|\mathbf{a} - \mathbf{p}|^2 \geq 0$, betyr dette at

$$|\mathbf{a}|^2 \geq |\mathbf{p}|^2$$

som medfører at

ikke-negative?

$$|\mathbf{a}| \geq |\mathbf{p}|$$

(husk at både $|\mathbf{a}|$ og $|\mathbf{p}|$ er positive). Ifølge setningen ovenfor er $|\mathbf{p}| = \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|}$, og setter vi dette inn i ulikheten, får vi

$$|\mathbf{a}| \geq \frac{|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|}$$

Ganger vi med $|\mathbf{b}|$ på begge sider, sitter vi igjen med

$$|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \geq |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|$$

Vi har kommet frem til en berømt og meget nyttig ulikhet:

Skyldes Cauchy (1821) i denne formen

Setning 1.2.3 (Schwarz' ulikhet) *For alle* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *gjelder*

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

Vi har likhet (dvs. $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$*) hvis og bare hvis* $\mathbf{a}$ *og* $\mathbf{b}$ *er parallelle eller minst én av dem er null.*

Bevis: I utledningen av ulikheten har vi strengt tatt gått ut i fra at $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, men ulikheten gjelder åpenbart også om én eller begge vektorer er lik $\mathbf{0}$ (for da er venstresiden i ulikheten lik 0). Det gjenstår dermed bare å sjekke den siste påstanden. Leser du gjennom utledningen av ulikheten en gang til, vil du se at vi har likhet når $|\mathbf{a} - \mathbf{p}| = 0$, dvs. når $\mathbf{a} = \mathbf{p}$. Siden $\mathbf{p}$ er parallell med $\mathbf{b}$, skjer dette når $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er parallelle. □

Du husker sikkert fra skolematematikken at

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos v$$

der v er vinkelen mellom vektorene $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$. I utgangspunktet gir denne formelen bare mening når $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er vektorer i planet eller rommet — for generelle n-tupler vet vi jo ikke hva vinkler er. Ved hjelp av Schwarz' ulikhet kan vi nå snu situasjonen på hodet; vi *definerer* rett og slett vinkelen mellom to ikke-null n-tupler $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ til å være den vinkelen v mellom 0° og 180° som er slik at $\cos v = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$. Legg merke til at siden Schwarz' ulikhet garanterer at $-1 \leq \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \leq 1$, så finnes det alltid en slik vinkel v som definisjonen forutsetter. Vi ser også at vi får $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos v$.

Hva er så vitsen med et slikt abstrakt og merkelig vinkelbegrep? Kan disse vinklene brukes til noe, og oppfører de seg som de vinklene vi er vant til fra planet og rommet? Dette er fornuftige spørsmål som bare erfaring kan gi svar på. Erfaringen viser at disse vinklene fungerer utmerket, og at de i det store og hele har de samme egenskapene som vinkler i 2 og 3 dimensjoner. Vi skal ikke komme nærmere inn på dette her, men tar med et eksempel på hvordan man finner en vinkel:

Eksempel 1: Finn vinkelen mellom vektorene $\mathbf{a} = (2, -1, 0, 1, 1)$ og $\mathbf{b} = (0, 1, 3, -2, 0)$. Vi har

$$\cos v = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} =$$

$$= \frac{(2,-1,0,1,1)\cdot(0,1,3,-2,0)}{|(2,-1,0,1,1)||(0,1,3,-2,0)|} = \frac{-3}{\sqrt{7}\sqrt{14}} = -\frac{3\sqrt{2}}{14}$$

Bruker vi en lommeregner, finner vi at $-\frac{3\sqrt{2}}{14} \approx -0.3030$. Dette gir $v \approx \arccos(-0.3030) \approx 107.6°$. ♣

Et viktig resultat i planet og rommet er trekantulikheten som sier at $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$. Ved hjelp av Schwarz' ulikhet skal vi nå vise at trekantulikheten også gjelder i n dimensjoner.

Setning 1.2.4 (Trekantulikheten) *For alle* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *gjelder*

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

Bevis: Vi har

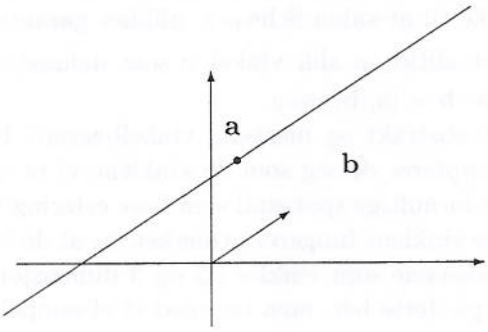
$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})$$

$$= |\mathbf{a}|^2 + 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 \leq |\mathbf{a}|^2 + 2\,|\mathbf{a}||\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2$$

der vi har brukt at ifølge Schwarz' ulikhet er $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$. □

Geometrisk sier trekantulikheten at lengden til den ene siden i en trekant alltid er mindre enn summen av de to andre sidene. Resultatet ovenfor forteller oss at dette også gjelder i høyere dimensjoner. Faktisk spiller trekantulikheten en nøkkelrolle i de fleste forsøk på å generalisere avstandsbegrepet til nye sammenhenger. I denne boken skal vi ha stor glede av trekantulikheten når vi studerer funksjoner av flere variable. (eller lik?)

La oss avslutte denne seksjonen med å se på hvordan vi kan generalisere begrepet *linje* til $\mathbb{R}^n$. Vi starter i planet. Figur 7 viser en rett linje gjennom punktet $\mathbf{a}$ parallell med vektoren $\mathbf{b}$.



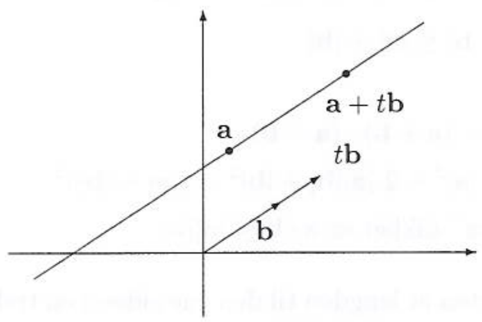
Figur 7: Rett linje gjennom **a** parallell med **b**

Siden enhver vektor $t\mathbf{b}$ er parallell med $\mathbf{b}$, ser vi at alle punkter av typen $\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ må ligge på linjen (se figur 8). Det er heller ikke så vanskelig å overbevise seg om at ethvert punkt på linjen må være av formen $\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ for ett eller annet tall t.

Vi har dermed kommet frem til at de punktene som ligger på den rette linjen, er nøyaktig de som er av typen $\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ for et reelt tall t. Vi skriver gjerne

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

og tenker på $\mathbf{r}(t)$ som et punkt som beveger seg langs linjen når t endrer seg.



Figur 8: Parameterfremstilling av en rett linje

Det er nå lett å generalisere begrepet rett linje til $\mathbb{R}^n$. Hvis $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, så består *den rette linjen gjennom punktet* $\mathbf{a}$ *og med retningsvektor* $\mathbf{b}$ av alle punkter på formen

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

Bruker vi koordinater, ser vi at hvis $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, så blir

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b} = (a_1 + tb_1, a_2 + tb_2, \ldots, a_n + tb_n)$$

Eksempel 2: Finn en parameterfremstilling til linjen gjennom punktet $\mathbf{a} = (1, 2, 0, -1)$ med retningsvektor $\mathbf{b} = (-1, 2, -3, 1)$, og avgjør om punktet $\mathbf{c} = (2, -1, 1, 4)$ ligger på linjen.

Parameterfremstillingen er

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b} = (1 - t, 2 + 2t, -3t, -1 + t)$$

Skal punktet $\mathbf{c}$ ligge på linjen, må det finnes et tall t slik at $\mathbf{r}(t) = \mathbf{c}$, dvs. at følgende ligninger må være oppfylt:

$$1 - t = 2, \quad 2 + 2t = -1, \quad -3t = 1, \quad -1 + t = 4$$

Siden det ikke finnes noe tall t som oppfyller alle disse ligningene, ligger ikke $\mathbf{c}$ på linjen. ♣

La oss avslutte denne seksjonen med et begrep som først vil spille en sentral rolle i senere kapitler, men som det kan være greit å vite om allerede nå. Anta at vi har vektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ i $\mathbb{R}^n$. Vi sier at vektoren $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ er en *lineærkombinasjon* av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ dersom det finnes tall $s_1, s_2, \ldots, s_k$ slik at

Hver $\vec{v}_i$ er altså et n-tuppel, og ~~kan~~ vi har k stike.

$$\mathbf{v} = s_1\mathbf{v}_1 + s_2\mathbf{v}_2 + \cdots + s_k\mathbf{v}_k$$

MATLAB-kommentar: MATLAB har en egen kommando for å regne ut lengden (eller normen) til en vektor $\mathbf{a}$. Vi skriver `>>norm(a)`.

Oppgaver til seksjon 1.2

1. Finn skalarproduktet av $(-2, 3)$ og $(4, 1)$. Finn også vinkelen mellom vektorene.

2. $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 5$ og vinkelen mellom $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er $45°$. Finn $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

3. Finn vinkelen mellom vektorene $(1, 2, 3)$ og $(-1, 0, 1)$.

4. Regn ut vinkelen mellom $(-1, 2, 6, 2, 4)$ og $(1, 0, 3, 1, 1)$.

5. Finn vinkelen mellom vektorene $\mathbf{a} = (4, 3, 1, 2)$ og $\mathbf{b} = (-1, 3, 2, 0)$. Finn også projeksjonen av $\mathbf{a}$ ned på $\mathbf{b}$.

6. Hvor lang er projeksjonen av $(-3, 4, 2, 5)$ ned på $(0, 3, 1, 2)$?

7. Skriv $\mathbf{a} = (4, 3)$ som en sum av to vektorer $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ der $\mathbf{b}$ er parallell med $\mathbf{d} = (1, 2)$ og $\mathbf{c}$ står normalt på $\mathbf{d}$.

8. Skriv $\mathbf{a} = (2, 2, 1)$ som en sum av to vektorer $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ der $\mathbf{b}$ er parallell med $\mathbf{d} = (1, 0, -1)$ og $\mathbf{c}$ står normalt på $\mathbf{d}$

9. Finn vinkelen som hver av vektorene $\mathbf{a} = (\sqrt{3}, 1)$ og $\mathbf{b} = (1, 1)$ danner med x-aksen. Regn ut $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ og bruk svaret til å finne et eksakt uttrykk for $\cos(15°)$.

10. Finn to vektorer som begge står normalt på $(3, 2, -1)$ og som ikke er parallelle.

11. Vis at dersom $\mathbf{a}$ står normalt på både $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$, så står $\mathbf{a}$ normalt på $\mathbf{b} + \mathbf{c}$.

12. I denne oppgaver er $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

a) Vis at $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$.

b) Finn $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ når $|\mathbf{a}| = 6$, $|\mathbf{b}| = 4$ og $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 3$,

c) Anta at $|\mathbf{c}| = 3$, $|\mathbf{d}| = 4$ og $|\mathbf{c} + \mathbf{d}| = 5$. Finn vinkelen mellom $\mathbf{c}$ og $\mathbf{d}$.

13. Per påstår at han har to vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ slik at $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 2$ og $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 7$. Hvorfor tror du ikke på ham?

14. Kari påstår at hun har to vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ slik at $|\mathbf{a}| = 7$, $|\mathbf{b}| = 2$ og $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -16$. Hvorfor tror du ikke på henne?

15. Vis at for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ er $|\mathbf{x}| - |\mathbf{y}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Vis også at $|\mathbf{y}| - |\mathbf{x}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, og konkluder med at $\big|\,|\mathbf{x}| - |\mathbf{y}|\,\big| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.

16. Avstanden $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ mellom to punkter $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ er lik lengden til vektoren som forbinder dem, dvs. $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$. Bevis at $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + d(\mathbf{c}, \mathbf{b})$ for alle vektorer $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Hva er den geometriske tolkningen av denne ulikheten?

17. Vis at for alle vektorer $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ gjelder $|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = 2|\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{y}|^2$. Vis at i et parallellogram er summen av kvadratene av sidene lik summen av kvadratene av diagonalene.

18. Finn en parameterfremstilling av linjen som går gjennom punktet $(-1, -1, 2)$ og er parallell med $(2, 3, 1)$.

19. Finn en parameterfremstilling av linjen gjennom $(-3, -2, 5, 8)$ parallell med $(1, -2, -1, 3)$. Sjekk om punktet $(1, -6, 3, 14)$ ligger på linjen.

20. Finn en parameterfremstilling av linjen som går gjennom punktene $(2, -1, 3)$ og $(3, 8, -2)$.

21. Finn en parameterfremstilling av linjen som går gjennom punktene $(7, -3, 2, 4, -2)$ og $(2, 1, -1, -1, 5)$.

22. Finn en parameterfremstilling for linjen som går gjennom $(5, -2)$ og som står normalt på $(-1, 2)$.

23. Finn en parameterfremstilling for linjen i planet som har ligning $2x + 3y = 6$.

24. En linje i planet har parameterfremstilling $(-3 + 2t, 2 - t)$. Finn en ligning av typen $y = ax + b$ for denne linjen.

25. To skip er på kryssende kurs. Ved tiden $t = 0$ er det ene skipet i punktet $(0, 4)$, og det andre skipet i punktet $(39, 14)$ (alle avstander er målt i nautiske mil.) Det første skipet beveger seg parallelt med vektoren $(3, 4)$ med en fart av 15 knop (1 knop = 1 nautisk mil per time). Det andre skipet beveger seg parallelt med vektoren $(-12, 5)$ med en fart av 13 knop.

a) Hvor vil kursene krysse hverandre?

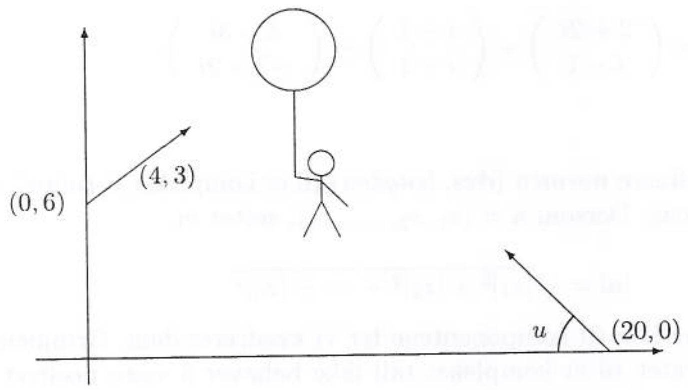
b) Vil skipene kollidere?

26. To fly er i det samme området. Ved tiden $t = 0$ er det ene flyet i punktet $(0, 0, 2000)$ og flyr med en fart på 150m/s parallelt med vektoren $(2, 2, 1)$. Det andre flyet er ved tiden $t = 0$ i punktet $(5000, -1000, 4000)$ og 20 sekunder senere i punktet $(4400, 2000, 4000)$. Flyet følger en rett linje og holder konstant hastighet.

a) Vil kursene til de to flyene skjære hverandre?

b) Vil flyene kollidere?

27. I sin evige jakt etter honning forsøker Ole Brumm å invadere et tre ved hjelp av en ballong. Plutselig blir ballongen tatt av et vindkast og farer av sted med Ole Brumm. Etter å ha tenkt seg om et øyeblikk, innser Kristoffer Robin at hans eneste sjanse til å redde vennen er å skyte istykker ballongen med lekegeværet sitt. Figuren nedenfor viser en skisse av situasjonen.



Når vindkastet kommer ved tiden $t = 0$, befinner ballongen seg i punktet $(0, 6)$. Den blir ført av gårde med en fart av 5m/s i retningen $(4, 3)$. Ved tiden $t = 2$ skyter Kristoffer Robin mot ballongen fra sin posisjon $(20, 0)$. Vinkelen mellom geværet og underlaget er u, og vi regner med at kulen beveger seg rettlinjet med en fart av 70m/s. Alle avstander er målt i meter og tiden er målt i sekunder.

a) Forklar at ballongens posisjon ved tiden t er $(4t, 6 + 3t)$.

b) Vis at kulens posisjon ved tiden t er $(20 - 70(t-2)\cos u, 70(t-2)\sin u)$.

c) Hvilken vinkel u må Kristoffer Robin holde geværet i for å treffe midt i ballongen? Hvor langt er det ned til bakken når ballongen blir truffet?

28. I denne oppgaven skal vi se på et annet bevis for Schwarz' ulikhet.

a) Vis at for alle $a, b \in \mathbb{R}$ og alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ er

$$0 \leq |a\mathbf{x} \pm b\mathbf{y}|^2 = a^2|\mathbf{x}|^2 \pm 2ab\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + b^2|\mathbf{y}|^2$$

b) Velg $a = |\mathbf{y}|$, $b = |\mathbf{x}|$ i ulikhetene ovenfor og utled Schwarz' ulikhet.

1.3 Komplekse n-tupler

Hittil har vi bare sett på n-tupler $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ der komponentene $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er reelle tall. Vi skal nå ta en rask titt på det komplekse tilfellet. Som nevnt tidligere kalles mengden av alle komplekse n-tupler for $\mathbb{C}^n$. Addisjon og subtraksjon av komplekse n-tupler foregår komponentvis akkurat som i det reelle tilfellet. Også multiplikasjon med skalar (som nå godt kan være kompleks) foregår akkurat som før. La oss se på et eksempel:

Eksempel 1: Regn ut $s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ når $s = 1+i$, $t = i$, $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}$. Vi får (husk at $i^2 = -1$):

$$s\mathbf{a} + t\mathbf{b} = (1+i)\begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+i)2 \\ (1+i)i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i(1-i) \\ i(1+i) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+2i \\ i-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i+1 \\ i-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+3i \\ -2+2i \end{pmatrix}$$

♣

Når vi skal definere *normen* (dvs. *lengden*) til et komplekst n-tuppel, må vi være litt forsiktig. Dersom $\mathbf{a} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, setter vi

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2}$$

Merk at $|a|$ er reell.

Vi tar altså tallverdien til komponentene før vi kvadrerer dem. Grunnen til dette er at kvadratet til et komplekst tall ikke behøver å være positivt og derfor gir et dårlig mål på størrelse.

Eksempel 2: Finn normen til vektoren $\mathbf{a} = (2+i, 4+i, 1-3i)$. Husk at dersom $z = a + ib$, så er $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ og dermed $|z|^2 = a^2 + b^2$. Dette gir

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{|2+i|^2 + |4+i|^2 + |1-3i|^2} =$$

$$= \sqrt{(2^2+1^2)+(4^2+1^2)+(1^2+(-3)^2)} =$$
$$= \sqrt{4+1+16+1+1+9} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Lengden til vektoren er altså $4\sqrt{2}$. ♣

For å få til det riktige samspillet mellom normen og skalarproduktet, må vi også gjøre en liten justering i definisjonen av skalarprodukt. Dersom $\mathbf{a} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ og $\mathbf{b} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$, definerer vi

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} + \cdots + z_n\overline{w_n}$$

$\bar{z}$ = konjugert, ikke vektor.

Vi komplekskonjugerer altså den andre faktoren i skalarproduktet. Siden $z\bar{z} = |z|^2$, ser vi at

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + \cdots + z_n\overline{z_n} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_n|^2 = |\mathbf{a}|^2$$

Vi har altså den vanlige sammenhengen mellom norm og skalarprodukt:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$$

La oss ta med et eksempel på hvordan man regner ut et komplekst skalarprodukt.

Eksempel 3: Regn ut $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ når $\mathbf{a} = (1+i, -2, 1+3i)$ og $\mathbf{b} = (2+2i, 1-2i, 3+4i)$. Vi får

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (1+i)(2-2i) + (-2)(1+2i) + (1+3i)(3-4i) =$$
$$= 2-2i+2i+2-2-4i+3-4i+9i+12 = 17+i$$

Skalarproduktet av to komplekse vektorer er altså et komplekst tall. ♣

På grunn av komplekskonjugasjonen i annen faktor, har vi ikke lenger at $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ for komplekse vektorer (den *kommutative lov* gjelder altså ikke for komplekse skalarprodukter). Bruker vi regnereglene for konjugasjon (se *Kalkulus*, setning 3.1.5), ser vi imidlertid at

$$\overline{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}} = \overline{w_1\overline{z_1} + w_2\overline{z_2} + \cdots + w_n\overline{z_n}} =$$
$$= \overline{w_1}\,\overline{\overline{z_1}} + \overline{w_2}\,\overline{\overline{z_2}} + \cdots + \overline{w_n}\,\overline{\overline{z_n}} =$$
$$= \overline{w_1}z_1 + \overline{w_2}z_2 + \cdots + \overline{w_n}z_n =$$
$$= z_1\overline{w_1} + z_2\overline{w_2} + \cdots + z_n\overline{w_n} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$$

Bytter vi om på faktorenes rekkefølge, så komplekskonjugerer vi altså resultatet!

Siden vi er så vant til at faktorenes rekkefølge ikke spiller noen rolle, er det lett å bli lurt av det komplekse skalarproduktet. Dersom vi skal regne ut $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, er det f.eks. fristende å bruke første kvadratsetning til å skrive svaret

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b},$$

men dette blir ikke riktig! Ganger vi nemlig ut parentesene litt forsiktig, ser vi at

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$$

og siden $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ og $\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ *ikke* er like, kan vi ikke slå sammen de to midterste leddene på vanlig måte. Siden tallene $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ og $\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$ er komplekskonjugerte, har vi imidlertid at $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}=2\,\mathrm{Re}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ (der Re står for realdel), og dermed kan vi skrive

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}+2\,\mathrm{Re}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=$$

$$|\mathbf{a}|^2+2\,\mathrm{Re}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})+|\mathbf{b}|^2$$

Dette regnestykket viser at vi må være litt forsiktige når vi overfører standard regneprosedyrer til komplekse skalarprodukt.

La oss skrive opp de grunnleggende regnereglene for komplekse n-tupler (sammenlign med setning 1.1.1 for reelle n-tupler):

Setning 1.3.1 (Regneregler for komplekse n-tupler.) *Dersom* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *og* $\mathbf{c}$ *er n-tupler, og s og t er komplekse tall, gjelder følgende regneregler:*

(a) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

(b) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\overline{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}}$

(c) $s(\mathbf{a}+\mathbf{b})=s\mathbf{a}+s\mathbf{b}$

(d) $(s+t)\mathbf{a}=s\mathbf{a}+t\mathbf{a}$

(e) $\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}+\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}$ *og* $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$

(f) $(s\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=s(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ *og* $\mathbf{a}\cdot(s\mathbf{b})=\overline{s}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$

(g) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\geq 0$ *med likhet hvis og bare hvis* $\mathbf{a}=\mathbf{0}$

Bevis: Med unntak av b) (som vi nettopp har bevist) og andre del av f), er dette nøyaktig de samme reglene som i setning 1.1.1, og bevisene er også de samme. Vi nøyer oss derfor med å vise andre del av f). Hvis $\mathbf{a}=(z_1,z_2,\ldots,z_n)$ og $\mathbf{b}=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$, ser vi at $s\mathbf{b}=(sw_1,sw_2,\ldots,sw_n)$, og dermed er

$$\mathbf{a}\cdot(s\mathbf{b})=z_1\overline{sw_1}+z_2\overline{sw_2}+\cdots+z_n\overline{sw_n}=$$

$$=\overline{s}(z_1\overline{w_1}+z_2\overline{w_2}+\cdots+z_n\overline{w_n})=\overline{s}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\qquad\square$$

Vi kan innføre geometriske begreper for komplekse n-tupler akkurat som for reelle selv om visualiseringen blir enda vanskeligere i dette tilfellet. Vi sier f.eks. at to vektorer $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ er *ortogonale* dersom $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Legg merke til at dette medfører at $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = 0$ siden $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \overline{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}} = \overline{0} = 0$. Argumentkjeden som ga oss Pythagoras' setning, Schwarz' ulikhet og trekantulikheten i forrige seksjon, fungerer med små justeringer også i det komplekse tilfellet, og vi nøyer oss med å skrive opp resultatet:

Setning 1.3.2 *For komplekse vektorer* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *gjelder:*

(i) (Pythagoras' setning) Dersom $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ *er ortogonale, så er* $|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2$

(ii) (Schwarz' ulikhet) For alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ *er* $|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$

(iii) (Trekantulikheten) For alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ *er* $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$

□

Oppgaver til seksjon 1.3

1. Regn ut $s\mathbf{x} + t\mathbf{y}$ når $s = i$, $t = 1 + 2i$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4i \\ 2 - i \end{pmatrix}$ og $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 + i \\ 2i \end{pmatrix}$.

2. Finn lengden til vektorene $\mathbf{a} = (3 + 2i, -1 + i)$ og $\mathbf{b} = (i, 2 + 3i, -2 - i)$.

3. Regn ut skalarproduktet $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ når $\mathbf{x} = (1 + 3i, -2i, 2 + 3i)$ og $\mathbf{y} = (2, 1 + 2i, -1 + i)$.

4. Vis at for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ er

$$|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) + |\mathbf{y}|^2$$

og

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2 - 2\,\mathrm{Im}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) - |\mathbf{y}|^2$$

hvor $\mathrm{Re}(z)$ og $\mathrm{Im}(z)$ betegner hhv. realdelen og imaginærdelen til z.

5. Bevis setning 1.3.2 ved å gå gjennom beviset for de tilsvarende resultatene i seksjon 1.2 og se hvilke modifikasjoner som må gjøres.

1.4 Vektorproduktet

De regneoperasjonene vi hittil har sett på, er definert for vektorer av alle dimensjoner. I denne seksjonen skal vi se studere en operasjon — *vektorproduktet* — som bare er definert for tredimensjonale vektorer. Siden 3 er den fysiske romdimensjonen, brukes vektorproduktet ofte i geometriske problemstillinger. Det brukes også mye i fysikk og mekanikk — tok du fysikk i videregående skole, har du sikkert støtt på "høyrehåndsregler" i en del sammenhenger, og bak enhver slik høyrehåndsregel skjuler det seg et vektorprodukt.

Det er to måter å definere vektorproduktet på, en geometrisk og en algebraisk, og det er samspillet mellom disse to betraktningsmåtene som gir vektorproduktet slagkraft. Vi skal ta utgangspunkt i den algebraiske definisjonen. Før vi begynner, minner vi om at man i tre dimensjoner gjerne skriver enhetsvektorene langs aksene på denne måten:

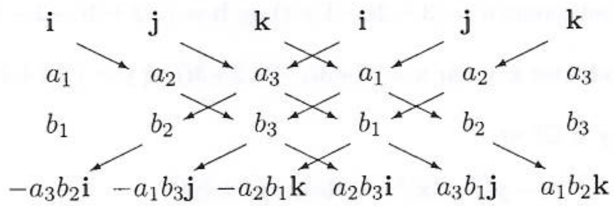
$$\mathbf{i} = (1,0,0), \qquad \mathbf{j} = (0,1,0), \qquad \mathbf{k} = (0,0,1).$$

Gitt to vektorer $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ i $\mathbb{R}^3$ definerer vi nå *vektorproduktet* (også kalt *kryssproduktet*) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ved:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k} \end{aligned}$$

Denne formelen kan være vanskelig å huske, men det finnes huskeregler. Én slik regel er vist i skjemaet nedenfor. Vi multipliserer langs pilene og gir resultatet positiv verdi dersom pilene går fra venstre mot høyre og negativ verdi dersom de går fra høyre mot venstre (kjenner du en annen huskeregel fra før, kan du trygt bruke den).

Henvisning fra
til determinant-
formel: 1.8.



Figur 1: Huskeregel for vektorproduktet

La oss regne ut et vektorprodukt:

Eksempel 1: Finn vektorproduktet av $\mathbf{a} = (3, -1, 2)$ og $\mathbf{b} = (4, -2, 5)$. Vi får:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= ((-1)\cdot 5 - 2\cdot(-2))\mathbf{i} + (2\cdot 4 - 3\cdot 5)\mathbf{j} + (3\cdot(-2) - (-1)\cdot 4)\mathbf{k} \\ &= (-1, -7, -2) \end{aligned}$$

♣

La oss så se hva som skjer dersom vi regner ut $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ istedenfor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{b} \times \mathbf{a} &= (b_2a_3 - b_3a_2,\ b_3a_1 - b_1a_3,\ b_1a_2 - b_2a_1) \\ &= -(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \end{aligned}$$

Akkurat som skalarproduktet for komplekse vektorer er altså vektorproduktet ikke-kommutativt, men vi har en formel som gjør at vi lett kan regne ut $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ når vi kjenner $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Her er en liste over de grunnleggende egenskapene til vektorproduktet:

Setning 1.4.1 *For vektorer* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ *gjelder:*

(a) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$

(b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ *og* $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$

(c) $\mathbf{a} \times (s\mathbf{b}) = s(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ *og* $(s\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = s(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ *der* $s \in \mathbf{R}$

(d) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *står ortogonalt på både* $\mathbf{a}$ *og* $\mathbf{b}$

(e) (Lagranges identitet) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$

Bevis: Punkt a) har vi allerede bevist og de andre bevisene er av samme type — vi skriver vektorene på koordinatform, regner ut og ser at det stemmer. Vi tar c), d) og e) som eksempler:
c) Hvis $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, så er $s\mathbf{a} = (sa_1, sa_2, sa_3)$. Vi får:

$$(s\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = ((sa_2)b_3 - (sa_3)b_2, (sa_3)b_1 - (sa_1)b_3, (sa_1)b_2 - (sa_2)b_1)$$

$$= s(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) = s(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

Den andre likheten i c) går på samme måte.
d) For å vise at $\mathbf{a}$ står ortogonalt på $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, må vi vise at $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$. Vi får:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_2a_1b_3 + a_3a_1b_2 - a_3a_2b_1 = 0$$

En helt tilsvarende regning viser at $\mathbf{b}$ står ortogonalt på $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
e) Vi skriver $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ og regner ut begge sider (du er ikke forpliktet til å føle at dette er spesielt festlig):

$$|(\mathbf{a} \times \mathbf{b})|^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

$$= a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2$$

og

$$|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

$$= a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_3^2$$

$$-a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_3^2b_3^2 - 2a_1a_2b_1b_2 - 2a_1a_3b_1b_3 - 2a_2a_3b_2b_3$$

$$= a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 - 2a_1a_3b_1b_3 - 2a_2a_3b_2b_3$$

Bortsett fra rekkefølgen på leddene er dette det samme uttrykket som vi fikk ovenfor. Dermed er e) bevist. □

Bemerkning: Legg merke til at det ikke finnes noen assosiativ lov i listen ovenfor — generelt er nemlig $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} \neq \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$. Som et eksempel lar vi $\mathbf{a} = (1,1,0)$, $\mathbf{b} = (1,0,0)$ og $\mathbf{c} = (0,0,1)$. Da er

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = ((1,1,0)\times(1,0,0))\times(0,0,1) = (0,0,-1)\times(0,0,1) = \mathbf{0}$$

mens

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (1,1,0)\times((1,0,0))\times(0,0,1)) = (1,1,0)\times(0,-1,0) = (0,0,-1)$$

At $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} \neq \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ betyr at uttrykket $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ ikke gir noen mening — vi må ha med parenteser for å presisere hvilken rekkefølge produktene skal utføres i.

Som allerede nevnt, er det også en geometrisk måte å beskrive vektorproduktet på. For å finne frem til denne geometriske beskrivelsen, tar vi utgangspunkt i punkt e) i setningen ovenfor:

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2$$

Siden vi allerede vet at $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos v$, der v er vinkelen mellom $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$, så er

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\cos^2 v = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\sin^2 v$$

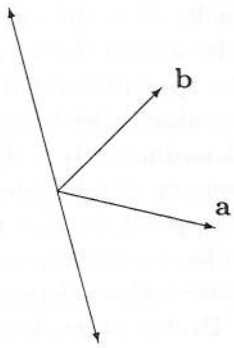
der vi har benyttet at $1 - \cos^2 v = \sin^2 v$. Altså er

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin v$$

(husk at siden $0° \leq v \leq 180°$, er $\sin v$ aldri negativ). Dermed vet vi hvor lang vektoren $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ er. Legg spesielt merke til at $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$ hvis og bare hvis $\sin v = 0$, dvs. dersom $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er parallelle.

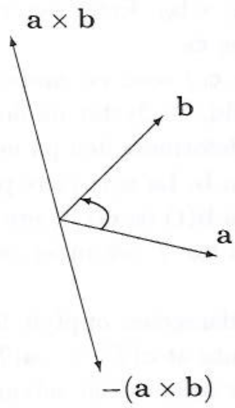
Fra punkt d) i setning 1.4.1 vet vi også noe om retningen til $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, nemlig at $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ står normalt på både $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$. Nå finnes det to motsatt rettede vektorer som har lengde $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin v$ og står normalt på både $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ (se figur 2). For å vite hvilken av disse to vektorene som er $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, bruker vi *høyrehåndsregelen*:

som



Figur 2: To like lange vektorer som står normalt på både **a** og **b**

Vi legger høyre hånd med fingrene pekende den korteste veien fra **a** til **b** mens vi spriker med tommelen. Da er $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ den av de to normalvektorene som peker i tommelens retning (se figur 3 der den krumme pilen viser den retningen fingrene peker). Legg merke til at når vi regner ut $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, skal fingrene spenne over den samme vinkelen, men i motsatt retning (fra **b** mot **a**), og tommelen kommer derfor til å peke motsatt vei. Dette er den geometriske forklaringen på regelen $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.



Figur 3: Vektorene $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ og $-(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

La oss oppsummere det vi har kommet frem til:

Setning 1.4.2 *La* **a** *og* **b** *være to vektorer i* $\mathbb{R}^3$ *og kall vinkelen mellom dem* v. *Da har vektorproduktet* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *lengde* $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin v$ *og står normalt på både* **a** *og* **b**. *Retningen til* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *er gitt ved høyrehåndsregelen.*

! **Bevis:* Vi har bevist alt bortsett fra høyrehåndsregelen. Beviset vi skal gi for denne regelen kan se litt umatematisk og skissemessig (og vanskelig!) ut, men det kan uten store endringer bygges ut til et fullverdig bevis. Du kan godt hoppe over dette beviset uten å få problemer med det som kommer senere. Legg merke til at hvis $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er parallelle, så er det ingen ting å bevise siden $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Vi ser derfor på tilfellet der $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ *ikke* er parallelle.

Vi skal først bevise høyrehåndsregelen for det spesialtilfellet der $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ ligger i xy-planet, og $\mathbf{a}$ peker langs den positive x-aksen. Det betyr at $\mathbf{a}$ har koordinater $\mathbf{a} = (a_1, 0, 0)$ der $a_1 > 0$, og $\mathbf{b}$ har koordinater $\mathbf{b} = (b_1, b_2, 0)$. I dette tilfellet vil $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ være parallell med z-aksen, og vi må undersøke når den peker i positiv retning. Bruker vi høyrehåndsregelen, får vi at $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ skal peke langs den positive z-aksen dersom $\mathbf{b}$ ligger i første eller annen kvadrant av xy-planet (dvs. når $b_2 > 0$), og langs den negative z-aksen dersom $\mathbf{b}$ ligger i tredje eller fjerde kvadrant (dvs. når $b_2 < 0$). Bruker vi isteden formelen for vektorproduktet, ser vi at

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0\,\mathbf{i} + 0\,\mathbf{j} + a_1 b_2\,\mathbf{k} = a_1 b_2\,\mathbf{k}$$

Denne vektoren peker langs den positive eller negative z-aksen ettersom b_2 er positiv eller negativ (husk at $a_1 > 0$). Dette betyr at formelen og høyrehåndsregelen gir samme resultat, og dermed er høyrehåndsregelen bevist i dette tilfellet.

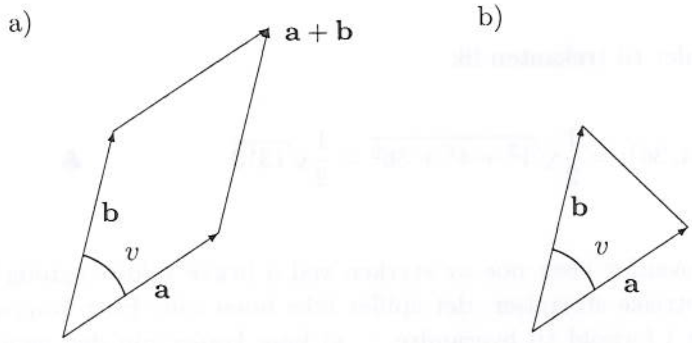
Vi er nå rede til å se på det generelle tilfellet $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Velg et par av vektorer $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$ i xy-planet slik at $\mathbf{a}$ peker langs den positive x-aksen, og slik at $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0$ er en "kopi" av paret $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Med dette mener vi at $\mathbf{a}_0$ er like lang som $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}_0$ er like lang som $\mathbf{b}$, og at vinkelen fra $\mathbf{a}_0$ til $\mathbf{b}_0$ er lik vinkelen fra $\mathbf{a}$ til $\mathbf{b}$. La $\mathbf{c}_0 = \mathbf{a}_0 \times \mathbf{b}_0$. Etter det vi allerede har vist, gjelder høyrehåndsregelen for $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$ og $\mathbf{c}_0$.

La oss nå tenke på vektortrippelet $(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{c}_0)$ som en materiell gjenstand, f.eks. tre sammensveisede biter av ståltråd. Vi flytter nå denne gjenstanden med en kontinuerlig bevegelse, uten å deformere den på noen måte, slik at $\mathbf{a}_0$ ender opp som $\mathbf{a}$, og $\mathbf{b}_0$ ender opp som $\mathbf{b}$. La $\mathbf{a}(t)$ være posisjonen til $\mathbf{a}_0$ etter t sekunder av denne bevegelsen, og la $\mathbf{b}(t)$ og $\mathbf{c}(t)$ være de tilsvarende posisjonene til $\mathbf{b}_0$ og $\mathbf{c}_0$. Hvis bevegelsen tar T sekunder, er dermed $\mathbf{a} = \mathbf{a}(T)$ og $\mathbf{b} = \mathbf{b}(T)$.

Dersom $\mathbf{c}(T) = \mathbf{a}(T) \times \mathbf{b}(T)$, er høyrehåndsregelen oppfylt for triplet $\mathbf{a}(T) = \mathbf{a}$, $\mathbf{b}(T) = \mathbf{b}$, $\mathbf{c}(T) = \mathbf{c}$. Vi skal derfor anta at $\mathbf{c}(T) = -\mathbf{a}(T) \times \mathbf{b}(T)$ (den eneste andre muligheten) og vise at dette fører til en selvmotsigelse. La t_0 være det første tidspunktet der $\mathbf{c}(t)$ skifter fra å være lik $\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)$ til å være lik $-\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)$ (formelt er $t_0 = \inf\{t : \mathbf{c}(t) = -\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)\}$). Siden $\mathbf{c}(t)$ beveger seg kontinuerlig, betyr dette at $\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)$ må gjøre et sprang ved tidspunktet t_0. Men det er umulig siden $\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)$ vil bevege seg kontinuerlig når $\mathbf{a}(t)$ og $\mathbf{b}(t)$ gjør det (tenk på det algebraiske uttrykket for vektorproduktet). Dermed har vi fått vår selvmotsigelse, og beviset er fullført. □

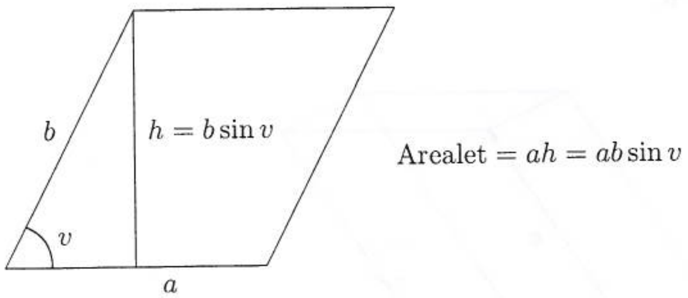
Vi skal nå se på noen av de tingene vektorproduktet kan brukes til. Først et enkelt eksempel.

Eksempel 2: Finn en vektor som står ortogonalt på både $\mathbf{a} = (1, -2, 3)$ og $\mathbf{b} = (4, -1, -2)$. Vi regner rett og slett ut vektorproduktet: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (1, -2, 3) \times (4, -1, -2) = (7, 14, 7)$. Legg merke til at siden $(7, 14, 7) = 7(1, 2, 1)$, kan vi forenkle løsningen til $(1, 2, 1)$. ♣



Figur 4: Parallellogrammet og trekanten utspent av **a** og **b**

Det neste vi skal se på, er hvordan vektorproduktet kan brukes til å regne ut arealer. To vektorer **a** og **b** utspenner på en naturlig måte et parallellogram (se figur 4a). Halvparten av dette parallellogrammet (se figur 4b ovenfor), utgjør trekanten utspent av **a** og **b**.



Figur 5: Arealet til et parallellogram

Setning 1.4.3 *Arealet til parallellogrammet utspent av vektorene* **a** *og* **b** *er lik* $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. *Arealet til trekanten utspent av* **a** *og* **b** *er* $\frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$

Bevis: Enkel geometri forteller oss at arealet til et parallellogram er produktet av de to sidene ganget med sinus til den mellomliggende vinkelen (se figur 5). For vårt parallellogram blir dette $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin v$, som vi vet er lik $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Siden arealet av trekanten er halvparten av arealet til parallellogrammet, får vi også formelen for arealet av trekanten. □

Eksempel 3: Finn arealet til trekanten med hjørner i punktene $\mathbf{a} = (2, -7, 3)$, $\mathbf{b} = (-2, 3, 2)$ og $\mathbf{c} = (2, 2, 2)$. Denne trekanten har samme areal som den utspent av vektorene $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ og $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ (hvorfor?) Siden $\mathbf{c} - \mathbf{a} = (0, 9, -1)$ og $\mathbf{b} - \mathbf{a} = (-4, 10, -1)$, får vi:

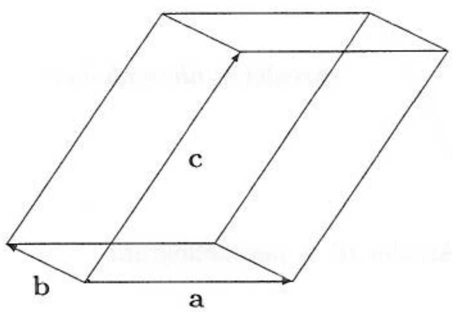
$$(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (0, 9, -1) \times (-4, 10, -1) = (1, 4, 36)$$

Dermed er arealet til trekanten lik

$$\frac{1}{2}|(1, 4, 36)| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 4^2 + 36^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1313} \qquad \clubsuit$$

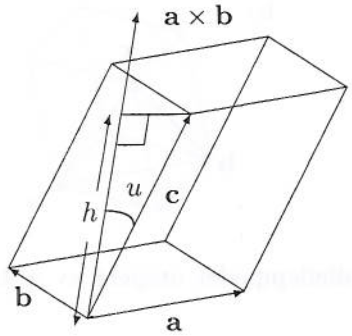
Eksemplet ovenfor viser noe av styrken ved å bruke vektorregning til å regne ut geometriske størrelser; det spiller ikke noen rolle hvor komplisert punktene ligger i forhold til hverandre — vi bare kopler inn den generelle formelen og ut faller svaret. Hadde vi prøvd å finne arealet med tradisjonelle geometriske metoder, hadde vi fort druknet i finurlige tegninger og kompliserte beregninger. Ulempen ved å bruke vektorregning er at vi ofte mister kontakten med det geometriske bildet — regningen viser oss at noe er riktig, men vi skjønner ikke riktig hvorfor.

Vektorproduktet kan også brukes til å regne ut volumer. Tre vektorer $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ i rommet definerer på en naturlig måte et romlegeme, et *parallellepiped*, som vist på figur 6.



Figur 6: Parallellepipedet utspent av $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$

Fra skolen vet vi at volumet til et parallellepiped er arealet av grunnflaten ganget med høyden. Sier vi at grunnflaten er parallellogrammet utspent av $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$, vet vi at arealet til grunnflaten er $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. På figur 7 har vi kalt vinkelen mellom $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ og den tredje vektoren $\mathbf{c}$ for u.



Figur 7: Volumet til et parallellepiped

Siden $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ står normalt på grunnflaten, blir høyden h lik $|\mathbf{c}||\cos u|$ (vi må ha med tallverdien rundt cosinus i tilfelle u er større en $90°$). Volumet til parallellepipedet er derfor $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}||\mathbf{c}||\cos u|$. Men dette uttrykket er jo lik $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$ (husk den geometriske beskrivelsen av skalarproduktet). Dermed har vi vist:

Setning 1.4.4 *Volumet til parallellepipedet utspent av vektorene* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *er* $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$

Bemerkning: Når vi skal regne ut volumet til parallellepipedet utspent av $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$, spiller selvfølgelig ikke rekkefølgen av de tre vektorene noen rolle. Volumet kan derfor skrives som både $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$, $|(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b}|$, $|(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}|$, $|(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}|$, $|(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}|$, og $|(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}|$. Disse seks uttrykkene må derfor være like. Hvis du orker, kan du sjekke dette ved direkte utregning.

Eksempel 4: Finn volumet til parallellepipedet som utspennes av vektorene $(4, 0, 3)$, $(-1, 2, -3)$ og $(0, 2, 1)$. Ifølge setningen er dette volumet gitt ved $|((4, 0, 3) \times (-1, 2, -3)) \cdot (0, 2, 1)|$. Vi regner først ut

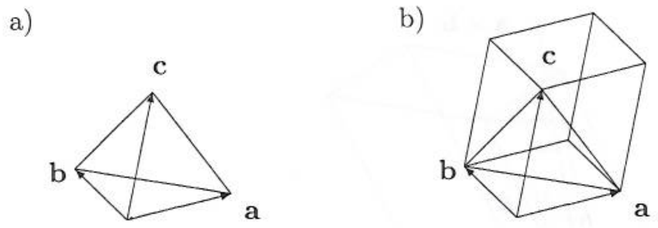
$$(4, 0, 3) \times (-1, 2, -3) = (-6, 9, 8)$$

Deretter tar vi

$$|(-6, 9, 8) \cdot (0, 2, 1)| = |0 + 18 + 8| = 26$$

Volumet er altså 26. ♣

Tre vektorer $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ utspenner også en pyramide (se figur 8a). For å finne volumet til denne pyramiden husker vi at volumet til en generell pyramide er $\frac{1}{3}gh$, der h er høyden og g er arealet til grunnflaten.



Figur 8: Pyramiden og parallellepipedet utspent av **a**, **b** og **c**

Sammenligner vi pyramiden utspent av **a**, **b**, **c** med parallellepipedet utspent av de samme vektorene (figur 8b), ser vi at høydene er like, men at grunnflaten til pyramiden er halvparten av grunnflaten til parallellepipedet. Det betyr at volumet til pyramiden må være en seksdel av volumet til parallellepipedet. Dermed har vi:

sjettedel?

Korollar 1.4.5 *Volumet av pyramiden utspent av de tre vektorene* **a**, **b**, **c** *er* $\frac{1}{6}|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}|$

Eksempel 5: Finn volumet til pyramiden med hjørner i punktene $\mathbf{a} = (-1,2,-3)$, $\mathbf{b} = (1,4,1)$, $\mathbf{c} = (0,4,7)$ og $\mathbf{d} = (3,0,5)$. Denne pyramiden har samme volum som pyramiden utspent av vektorene $\mathbf{b}-\mathbf{a}$, $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ og $\mathbf{d}-\mathbf{a}$ (forklar hvorfor!) Siden

$$\mathbf{b}-\mathbf{a} = (2,2,4) \qquad \mathbf{c}-\mathbf{a} = (1,2,10) \qquad \mathbf{d}-\mathbf{a} = (4,-2,8)$$

får vi:

$$\begin{aligned}\text{Volum} &= \frac{1}{6}|((2,2,4)\times(1,2,10))\cdot(4,-2,8)| \\ &= \frac{1}{6}|(12,-16,2)\cdot(4,-2,8)| = \frac{96}{6} = 16\end{aligned}$$

♣

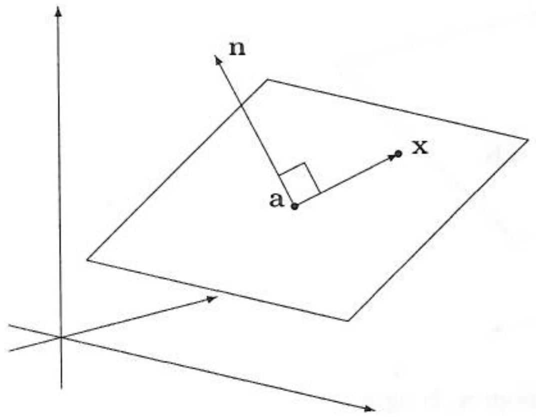
Helt til slutt i dette avsnittet skal vi se hvordan vi kan bruke vektorproduktet til å finne ligningen til et plan. Den enkleste måten å beskrive et plan på, er som regel å angi en normalvektor $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ pluss et punkt $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ som planet går gjennom. Planet består da av alle de punkter $\mathbf{x} = (x, y, z)$ slik at $\mathbf{x}-\mathbf{a}$ står normalt på $\mathbf{n}$ (se figur 9). At $\mathbf{x}-\mathbf{a}$ står normalt på $\mathbf{n}$ er ekvivalent med at

$$0 = \mathbf{n}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{a}) = n_1x + n_2y + n_3z - n_1a_1 - n_2a_2 - n_3a_3$$

eller med andre ord

$$n_1x + n_2y + n_3z = n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3$$

Dette kaller vi *ligningen* til planet. Legg merke til at koeffisientene til x, y og z rett og slett er koordinatene til $\mathbf{n}$



Figur 9: $\mathbf{x}$ ligger i planet gjennom $\mathbf{a}$ normalt på $\mathbf{n}$

Eksempel 6: Finn ligningen til planet som går gjennom $\mathbf{a} = (-3, 1, 2)$ og står normalt på $\mathbf{n} = (-4, 2, -1)$. Undersøk om punktet $(-2, 4, 3)$ ligger i dette planet.

Vi skal finne alle vektorer $\mathbf{x} = (x, y, z)$ slik at $0 = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$, dvs.

$$0 = (-4, 2, -1) \cdot (x - (-3), y - 1, z - 2)$$

$$= (-4)(x + 3) + 2(y - 1) - 1(z - 2) = -4x + 2y - z - 12$$

Altså blir ligningen

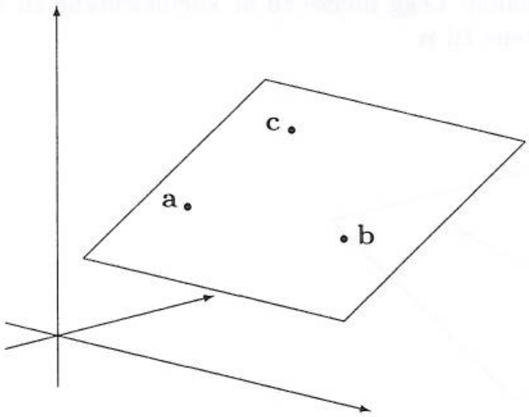
$$-4x + 2y - z = 12$$

For å undersøke om punktet $(-2, 4, 3)$ ligger i planet, sjekker vi om det passer i ligningen. Setter vi inn på venstre side, får vi:

$$-4 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 - 3 = 13 \neq 12$$

som viser at punktet ikke ligger i planet. ♣

En annen måte å beskrive et plan på, er å spesifisere tre punkter $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ som planet går gjennom, se figur 10 (sørg for at punktene ikke ligger på samme rette linje!). For å finne ligningen til planet, må vi da først finne en normalvektor. Det er ikke så vanskelig; en normalvektor til planet må stå normalt på begge vektorene $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ og $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ (siden begge disse vektorene i sin helhet ligger i planet), og kryssproduktet $\mathbf{n} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})$ er derfor et naturlig valg.



Figur 10: Planet gjennom **a**, **b** og **c**

Eksempel 7: Finn ligningen til planet som går gjennom $\mathbf{a} = (1, -2, 1)$, $\mathbf{b} = (3, -2, 2)$ og $\mathbf{c} = (2, 0, 1)$.

Siden $\mathbf{b} - \mathbf{a} = (2, 0, 1)$ og $\mathbf{c} - \mathbf{a} = (1, 2, 0)$, så er en normalvektor gitt ved

$$\mathbf{n} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = (2, 0, 1) \times (1, 2, 0) = (-2, 1, 4)$$

Siden normalvektoren er $(-2, 1, 4)$, vet vi at planligningen har formen

$$-2x + y + 4z = d$$

for et tall d. For å finne d, kan vi f.eks. sette inn koordinatene til $\mathbf{a}$ i ligningene:

$$d = -2 \cdot 1 + (-2) + 4 \cdot 1 = 0$$

Altså er ligningen til planet

$$-2x + y + 4z = 0$$

♣

MATLAB-kommentar: Du kan bruke MATLAB til å regne ut kryssproduktet til to vektorer $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ ved å skrive `cross(a,b)`.

Oppgaver til seksjon 1.4

1. Regn ut $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ når

a) $\mathbf{a} = (-1, 3, 2)$ $\mathbf{b} = (-2, 1, 7)$ b) $\mathbf{a} = (4, -3, 1)$ $\mathbf{b} = (-6, 1, 0)$

2. Finn arealet til parallellogrammet utspent av $\mathbf{a} = (-2, 3, 1)$ og $\mathbf{b} = (4, 0, -2)$.

3. En trekant har hjørner i punktene $(0, -1, 2)$, $(2, -1, 4)$ og $(3, 0, 4)$. Finn arealet.

4. Finn en vektor som står normalt på både $(2, 0, -3)$ og $(-1, 3, 4)$.

5. Regn ut $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i}$.

6. Finn volumet til parallellepipedet utspent av $(3, -2, -2)$, $(0, 0, 4)$ og $(-3, 2, 1)$.

7. En pyramide har hjørner i punktene $(2, -1, 2)$, $(0, 5, -3)$, $(2, 4, 6)$ og $(3, -2, 4)$. Finn volumet.

8. Finn en ligning for planet som går gjennom punktene $\mathbf{a} = (1, 1, -1)$, $\mathbf{b} = (0, -2, -6)$, $\mathbf{c} = (2, 3, 3)$.

9. Finn en ligning for planet som går gjennom punktene $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 3, 0)$, $\mathbf{c} = (2, 1, -1)$.

10. Anta at alle hjørnene i et parallellepiped har heltallige koeffisienter. Vis at volumet er et helt tall.

11. Bevis setning 1.4.1b).

12. Bruk MATLAB til å løse oppgave 1.

1.5 Matriser

Hittil har vi bare studert n-tupler, men tiden er nå inne for å introdusere matriser. En $m \times n$-*matrise* (matrix = linear)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

er et rektangulært oppsett av tall med m *rader* (linjer) og n *søyler*. To eksempler er 2×3-matrisen

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

og 3×3-matrisen

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ \frac{1}{2} & -2 & \pi \\ 1 & -\frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

Tallene $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ som inngår i matrisen A, kaller vi *elementene* i A. Legg merke til hvordan vi nummererer elementene: a_{34} er elementet i rad 3 og søyle 4 (strengt tatt burde vi ha skrevet et komma mellom 3-tallet og 4-tallet for å gjøre det klart at det ikke er element nummer 34 det er snakk om, men man blir fort lei av å skrive alle kommaene, og det er derfor vanlig å droppe dem dersom det ikke kan oppstå misforståelser). Legg også merke til at vi kan oppfatte vektorer som matriser. En radvektor

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

er en $1 \times n$-matrise, mens en søylevektor

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

er en $n \times 1$-matrise. Som matriser betraktet er altså radvektoren og søylevektoren av forskjellig type, og når vi blander vektorer og matriser er det derfor viktig å holde styr på om **a** skal oppfattes som en rad- eller en søylevektor. Vi skal komme tilbake til dette etter hvert. Legg forøvrig merke til at en 1×1-matrise (a_{11}) bare er et tall med en parentes rundt. Parentesen spiller ingen rolle, og vi skal derfor si at en 1×1-matrise bare er et tall a_{11}.

Akkurat som for n-tupler kan vi definere addisjon og subtraksjon komponentvis. Dersom vi har to $m \times n$-matriser

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

så definerer vi

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

og

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & a_{m2} - b_{m2} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}$$

Siden alle regneoperasjoner foregår komponentvis, vil de vanlige regnereglene for addisjon og subtraksjon også gjelde for matriser.

Vi kan også multiplisere en matrise med et tall s ved å gange tallet inn i hver komponent:

$$sA = \begin{pmatrix} sa_{11} & sa_{12} & \cdots & sa_{1n} \\ sa_{21} & sa_{22} & \cdots & sa_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ sa_{m1} & sa_{m2} & \cdots & sa_{mn} \end{pmatrix}$$

La oss ta et eksempel der vi kombinerer flere av regneoperasjonene:

Eksempel 1: Regn ut $3A - 2B$ når

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Vi får

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 12 & 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 12 & -4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 0 & 4 & -9 \end{pmatrix}$$

♣

Transponering er en viktig operasjon for matriser som ikke finnes for tall. (= i.d) Vi transponerer en matrise ved å bytte om rader og søyler. Den *transponerte* til matrisen A ovenfor er derfor

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Legg merke til at når A er en $m \times n$-matrise, så er A^T en $n \times m$-matrise.

Eksempel 2: Den transponerte til 2×3-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

er

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

som er en 3×2-matrise. ♣

Transponering kan lett kombineres med addisjon, subtraksjon og multiplikasjon med skalar. Du kan sjekke at V.en

$$(A + B)^T = A^T + B^T, \quad (A - B)^T = A^T - B^T, \quad (cA)^T = cA^T$$

Hvis vi transponerer den transponerte, kommer vi tilbake til utgangspunktet:

$$(A^T)^T = A$$

Legg også merke til at rad- og søylevektorer er transponerte av hverandre. Oppfatter vi søylevektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

som en matrise, blir den transponerte en radvektor

$$\mathbf{a}^T = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

De grunnleggende regneoperasjonene for matriser som vi nå har sett på, er ganske enkle, men man kan jo lure på hva det hele er godt for — hvorfor innfører vi egentlig matriser når vi allerede har n-tupler til å holde styr på lister av tall? Ett svar er at en del lister kommer naturlig i rektangelform, og at det er greit å beholde denne formen for ikke å miste oversikt over informasjonen. Opplysningene vi legger inn i et regneark vil for eksempel ofte ha matriseform. Det neste eksemplet viser en situasjon som ofte forekommer, ~~og~~ der elementene i matrisen viser fordelingen mellom forskjellige muligheter.

Eksempel 3: En fruktpresse mottar epler fra fire forskjellige produsenter. Eplene blir sortert i tre kategorier: god, middels, dårlig. Erfaringene viser at produsentene har forskjellig kvalitet på sine produkter. Produsent 1 leverer 50% av god kvalitet, 30% av middels kvalitet og 20% av dårlig kvalitet. Tallene for de andre produsentene er: Produsent 2: 30%, 40%, 30%; produsent 3: 25%, 40%, 35%, produsent 4: 20%, 60%, 20%. Dersom vi gir hver produsent en søyle, kan vi sette opp denne informasjonen som en 3×4-matrise (husk at prosent betyr "hundredel"):

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.25 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.3 & 0.35 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Anta nå at fruktpressen mottar leveringer fra hver av produsentene: 4 tonn fra produsent 1, 5 tonn fra produsent 2, 3 tonn fra produsent 3 og 6 tonn fra produsent 4. Vi setter opp denne leveransen som en søylevektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Vi ønsker å finne ut hvor mange tonn vi har fått av hver kvalitet. Observer at dersom vi ganger hvert av tallene i første rad i A med tilsvarende tall i $\mathbf{b}$, og så legger sammen, får vi antall tonn av beste kvalitet:

$$0.5 \cdot 4 + 0.3 \cdot 5 + 0.25 \cdot 3 + 0.2 \cdot 6 = 2 + 1.5 + 0.75 + 1.2 = 5.45$$

Tilsvarende får vi antall tonn av nest beste kvalitet ved å gange tallene i annen rad i A med tilsvarende tall i $\mathbf{b}$, og så legge sammen:

$$0.3 \cdot 4 + 0.4 \cdot 5 + 0.4 \cdot 3 + 0.6 \cdot 6 = 1.2 + 2 + 1.2 + 3.6 = 8$$

Til slutt får vi antall tonn av dårligste kvalitet ved å gange tallene i nederste rad i A med tilsvarende tall i $\mathbf{b}$, og så legge sammen:

$$0.2 \cdot 4 + 0.3 \cdot 5 + 0.35 \cdot 3 + 0.2 \cdot 6 = 0.8 + 1.5 + 1.05 + 1.2 = 4.55$$

Legg merke til at i hvert av disse regnestykkene har vi regnet ut et slags skalarprodukt mellom en rad i matrisen A og vektoren $\mathbf{b}$ (vi sier et "slags" skalarprodukt siden det er et litt uortodokst produkt mellom en radvektor og en søylevektor). Legg også merke til at vi kan tenke på resultatet av regnestykkene som en ny vektor

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 5.45 \\ 8 \\ 4.55 \end{pmatrix}$$

som forteller oss hvor mange tonn vi har av hver kvalitet. ♣

Vi skal se på et eksempel til av lignende type.

Eksempel 4: Et kjøpesenter har tre stativ X, Y og Z hvor du kan hente og avlevere handlevogner. Av de vognene som starter dagen i stativ X, vil 70% avslutte den på samme sted, 10% vil ha endt opp i Y, og 20% i Z. Av de vognene som startet dagen i stativ Y, vil 30% avslutte dagen i stativ X, mens henholdsvis 50% og 20% vil havne i stativene Y og Z. De tilsvarende tallene for vogner som starter i Z, er at 40% ender dagen i X, 20% i Y og 40% i Z. Vi kan ordne disse tallene i en matrise A der første søyle gir fordelingen av de vognene som startet i X, andre søyle gir fordelingen av de vognene som startet i Y og tredje søyle gir fordelingen av vognene som startet i Z:

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Anta nå at vi startet dagen med 100 vogner i X, 70 vogner i Y og 30 vogner i Z, og la oss skrive dette som en søylevektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Vi ønsker å finne ut hvor mange vogner som befinner seg på hvert sted ved slutten av dagen. Antall vogner i X får vi ved å gange tallene i første rad i A med tilsvarende komponent i vektoren $\mathbf{b}$, og så legge sammen:

$$0.7 \cdot 100 + 0.3 \cdot 70 + 0.4 \cdot 30 = 70 + 21 + 12 = 103$$

Antall vogner i Y får vi tilsvarende ved å gange hvert tall i annen rad i A med tilsvarende tall i $\mathbf{b}$, og så legge sammen:

$$0.1 \cdot 100 + 0.5 \cdot 70 + 0.2 \cdot 30 = 10 + 35 + 6 = 51$$

Antall vogner i Z ved slutten av dagen, får vi så ved å gange hvert tall i tredje rad i A med tilsvarende tall i $\mathbf{b}$, og legge sammen:

$$0.2 \cdot 100 + 0.2 \cdot 70 + 0.4 \cdot 20 = 10 + 14 + 12 = 46$$

Vi kan skrive opp resultatet som en ny vektor

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 103 \\ 51 \\ 46 \end{pmatrix}$$

som gir oss fordelingen av handlevogner ved slutten av dagen. Legg merke til at vi i dette eksemplet har gjort akkurat samme operasjoner som i det forrige; vi har tatt skalarproduktene mellom radene i A og søylevektoren $\mathbf{b}$. ♣

I begge eksemplene ovenfor gjennomførte vi samme type regneoperasjoner. Vi startet med en matrise A og en søylevektor $\mathbf{b}$, og laget en ny søylevektor $\mathbf{c}$ der komponentene fremkom som skalarprodukt av radene i A og vektoren $\mathbf{b}$. Denne regneoperasjonen er så vanlig at det er greit å ha et eget navn på den.

Definisjon 1.5.1 (Multiplikasjon av matrise og søylevektor) *Anta at A er en $m \times n$-matrise og at $\mathbf{b}$ er en n-dimensjonal søylevektor:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad og \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Produktet av A og $\mathbf{b}$ er da den m-dimensjonale søylevektoren $\mathbf{c} = A\mathbf{b}$ gitt ved

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1n}b_n \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2n}b_n \\ \vdots \\ a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \cdots + a_{mn}b_n \end{pmatrix}$$

Den i-te komponentene i $\mathbf{c} = A\mathbf{b}$ fremkommer altså ved at vi tar skalarproduktet av den i-te raden i A med vektoren $\mathbf{b}$.

Legg merke til at produktet $A\mathbf{b}$ bare er definert når A og $\mathbf{b}$ passer sammen størrelsesmessig; $\mathbf{b}$ må ha like mange komponenter som A har søyler. Observer også at produktet $A\mathbf{b}$ er en søylevektor med like mange rader som A.

Eksempel 5: Finn $A\mathbf{b}$ når

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Vi får

$$A\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3 + 1\cdot 6 \\ 4\cdot 3 + (-1)\cdot 6 \\ (-2)\cdot 3 + 5\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix}$$

♣

Vi skal komme tilbake til regneregler for produkter senere, men skriver opp noen av de enkleste og vanligste (i formlene nedenfor er s et tall):

$$(A+B)\mathbf{b} = A\mathbf{b} + B\mathbf{b}, \qquad (sA)\mathbf{b} = s(A\mathbf{b})$$
$$A(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = A\mathbf{b} + A\mathbf{c}, \qquad A(s\mathbf{b}) = s(A\mathbf{b})$$

Det er god trening å sjekke at disse reglene holder. Vær oppmerksom på at det også er en del ting du kan gjøre med vanlige produkter, som du *ikke* kan gjøre med produktet ovenfor, f.eks. kan du ikke bytte om på rekkefølgen av faktorene ($\mathbf{b}A$ gir ikke mening). Du kan heller ikke forkorte A i uttrykk av typen $A\mathbf{b} = A\mathbf{c}$ eller $\mathbf{b}$ i uttrykk av typen $A\mathbf{b} = B\mathbf{b}$ — å forkorte betyr egentlig å gange med et inverst element på begge sider av ligningen, og vi vet foreløpig ikke noe om inverse vektorer og matriser (det viser seg at vektorer ikke har inverser, men at noen matriser har det!)

La oss ta en ny kikk på eksempel 3 og 4 i lys av de begrepene vi nå har innført:

Eksempel 3 og 4 på nytt: I eksempel 3 (fruktpressen) ble leveransene fra de fire produsentene kodet som et 4-tuppel $\mathbf{b}$, mens 3-tuplet $\mathbf{c}$ fortalte oss hvor mange tonn vi mottok av hver kvalitet. Vi regnet ut elementene i $\mathbf{c}$ ved å ta skalarproduktet av radene i matrisen A med vektoren $\mathbf{b}$ — med andre ord:

$$\mathbf{c} = A\mathbf{b}$$

Som vi skal komme tilbake til senere, kan vi tenke på multiplikasjon med A som en "transformasjon" — vektoren $\mathbf{b}$ forteller oss hvor mye frukt vi får fra hver produsent, og multiplikasjon med A "transformerer" denne kunnskapen til kunnskap om hvor mye vi mottar av hver kvalitet (representert ved vektoren $\mathbf{c}$).

Noe lignende skjer i eksempel 4 (handlevognene). Her representerer vektor $\mathbf{b}$ fordelingen av handlevogner ved begynnelsen av dagen, mens vektor $\mathbf{c}$ representerer fordelingen ved slutten av dagen. Vi regnet ut elementene i $\mathbf{c}$ ved å ta skalarproduktet av radene i matrisen A med vektoren $\mathbf{b}$ — med andre ord:

$$\mathbf{c} = A\mathbf{b}$$

Igjen kan vi tenke på multiplikasjon med A som en transformasjon som transformerer kunnskap om hvor handlevognene er ved begynnelsen av dagen til kunnskap om hvor de er ved slutten av dagen. $\clubsuit$

La oss avslutte med en liten observasjon som vi kommer til å få glede av senere. Anta at

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

er to søylevektorer. Transponerer vi $\mathbf{a}$, får vi radvektoren

$$\mathbf{a}^T = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

som vi kan oppfatte som en $1 \times n$-matrise. Vi kan nå ta produktet av matrisen $\mathbf{a}^T$ og vektoren $\mathbf{b}$. Dette gir oss en 1×1-matrise (dvs. et tall):

$$\mathbf{a}^T\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

Matriseproduktet $\mathbf{a}^T\mathbf{b}$ er altså lik skalarproduktet $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Dette kan virke som en kuriositet, men viser seg å være viktig i en del sammenhenger.

MATLAB-kommentar: Du kan skrive inn en matrise

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i MATLAB ved med kommandoen

```
>>A=[2 -1 3
1 0 -3
4  0 1]
```

Du kan også markere linjeskiftene med semikolon:

```
>>A=[2 -1 3;1 0 -3;4  0 1]
```

Når matrisene er lastet inn, kan du utføre operasjoner med kommandoer som `>>A+B` og `>>3*A-2*B`. Den transponerte til A får du ved å skrive `>>A'`, og produktet mellom en matrise A og en vektor $\mathbf{b}$ er gitt ved kommandoen `>>A*b`. Alle disse kommandoene forutsetter at matrisene og vektorene har riktige dimensjoner slik at regneoperasjonene gir mening.

Oppgaver til seksjon 1.5

1. Regn ut $2A$, $(-3)B$, $A+B$ og $A-B$ når

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

2. Regn ut $4A - 3B$ når

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Finn de transponerte:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -1 & 8 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & -6 \\ 1 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Finn de transponerte til A, B og $4A - B$ når

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

5. Regn ut $A\mathbf{x}$ når:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

6. Regn ut hvor mange tonn vi får av hver kvalitet i eksempel 3 dersom produsent 1 leverer 10 tonn, produsent 2 leverer 5 tonn, produsent 3 leverer 8 tonn og produsent 4 leverer 6 tonn.

7. Hvordan vil handlevognene i eksempel 4 fordele seg ved slutten av dagen dersom vi begynner med 50 vogner i stativ X, 70 i stativ Y og 80 i stativ Z?

8. Bevis regnereglene for transponering som står rett etter eksempel 2.

9. Bevis regnereglene for multiplikasjon av matrise og vektor som står rett etter eksempel 5.

10. Et oljemottak får olje fra 3 oljefelt. Oljen inndeles i fem kvaliteter A, B, C, D, E. Fra oljefelt 1 er fordelingen: A: 10%, B: 20%, C: 30%, D: 30%, E: 10%. Fra oljefelt 2 er fordelingen: A: 0%, B: 30%, C: 30%, D: 30%, E: 10%. Fra oljefelt 3 er fordelingen: A: 20%, B: 20%, C: 10%, D: 10%, E: 40%. Anta at mottaket får inn x enheter fra felt 1, y enheter fra felt 2 og z enheter fra felt 3. Finn en matrise som kan brukes til å regne ut hvor mange enheter man får av hver kvalitet. Hva blir resultatet når $x = 10$, $y = 12$ og $z = 8$?

11. En smittsom sykdom sprer seg i et land. Helsemyndighetene deler befolkningen i tre grupper: smitteutsatte, syke, immune. Fra en uke til den neste regner man at 5% av de smitteutsatte blir syke, mens 1% av dem blir immune uten å ha vært syke. Av de syke blir 80% immune, mens resten fortsatt er syke. Én prosent av de immune mister immuniteten og blir smitteutsatte, mens resten fortsatt er immune. La x_n, y_n, z_n være den andelen av befolkningen som er hhv. smitteutsatt, syk og immun etter n uker. La $\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

a) Finn en matrise A slik at $A\mathbf{v}_n = \mathbf{v}_{n+1}$.

b) I uke 0 er 10% av befolkningen syke, mens resten er smitteutsatte. Finn fordelingen av smitteutsatte, syke og immune i uke 1 og 2.

12. En forskergruppe som studerer et bestemt dyreslag, deler bestanden inn i fire grupper:

1. unge, dvs. dyr født samme vår
2. unge voksne, dvs. dyr født året før
3. voksne, dvs. dyr født to år før
4. gamle, dvs. dyr født mer enn to år før

Statistikken viser at bare 5% av de unge overlever til året etter. Av de unge voksne overlever 50% til året etter. I tillegg gir en ung voksen i gjennomsnitt opphav til 20 unger som blir født året etter. Blant de voksne overlever 30% til året etter. I tillegg gir en voksen i gjennomsnitt opphav til 50 unger som blir født året etter. Av de gamle overlever 10% til året etter. I tillegg gir en gammel i gjennomsnitt opphav til 10 unger som blir født året etter. La x_n, y_n, z_n, u_n være hhv. antall unge, antall unge voksne, antall voksne og antall gamle etter n år, og skriv

$$\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ u_n \end{pmatrix}$$

a) Finn en matrise A slik at $\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n$.

b) Anta at det et år settes ut 100 voksne dyr i et terreng der det ikke er noen dyr fra før av. Hvor mange dyr av hver kategori vil det være i dette terrenget to år senere?

13. Per, Pål og Espen leker sisten. Hver gang Per eller Pål har sisten, er det 90% sjanse for at Espen får sisten neste gang, mens hver gang Espen har sisten, har Per og Pål 50% sjanse hver for å få sisten neste gang. Anta at x_n er sannsynligheten for at Per er den n-te som har sisten, at y_n er sannsynligheten for at Pål er den n-te som har sisten, og at z_n er sannsynligheten for at Espen er den n-te som har sisten. La $\mathbf{v}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$.

a) Finn en matrise A slik at $\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n$.

b) Anta at Pål har sisten først. Hva er sannsynligheten for at henholdsvis Per, Pål og Espen er den tredje som har sisten?

14. Bruk MATLAB til å løse oppgavene 1-4.

1.6 Multiplikasjon av matriser

I forrige seksjon så vi at addisjon og subtraksjon av matriser er lett; vi bare adderer og subtraherer komponentvis. Det er fristende å definere multiplikasjon på samme måte; hvis

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

så bør kanskje produktet være

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} & \cdots & a_{2n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} & a_{m2}b_{m2} & \cdots & a_{mn}b_{mn} \end{pmatrix}?$$

Det er ikke noe galt med dette produktet (det kalles *Hadamard-produktet* og er nyttig for noen formål), men det er en annen type matriseprodukt som er langt viktigere. Ved første øyekast ser dette produktet litt merkelig ut, og for å motivere det skal vi gå tilbake til produktet $A\mathbf{b}$ fra slutten av forrige seksjon. (Dersom du synes denne motivasjonen er vanskelig, kan du trøste deg med at det kommer en oppsummering i definisjon 1.6.1.)

La oss se litt nærmere på produktet $\mathbf{c} = A\mathbf{b}$ mellom en matrise A og en vektor $\mathbf{b}$. Som allerede nevnt, er det ofte smart å tenke på dette som en *transformasjon*; vi starter med en vektor $\mathbf{b}$, og matrisen A transformerer $\mathbf{b}$ til en ny vektor $\mathbf{c}$. I eksempel 3 i forrige seksjon (fruktpressen), så vi f.eks. hvordan A transformerer kunnskap om hvor mange tonn epler vi får fra hver produsent (kodet opp i vektoren $\mathbf{b}$) til kunnskap om hvor mange tonn epler vi har av hver kvalitet (kodet opp i vektoren $\mathbf{c} = A\mathbf{b}$). Noe tilsvarende skjedde i eksempel 4 (handlevognene); i dette tilfellet transformerer A kunnskap om hvor vognene er ved begynnelsen av dagen (gitt ved vektoren $\mathbf{b}$), til kunnskap om hvor de er ved slutten av dagen (gitt ved vektoren $\mathbf{c} = A\mathbf{b}$). Legg merke til at i begge eksemplene bruker vi den samme matrisen A uansett hvilken input-vektor $\mathbf{b}$ vi har — det er slik gjenbruk som ofte gjør matriser nyttige.

Skille mellom $\to$ og $\mapsto$?!

$f : X \to Y$

$x \mapsto f(x)$

Vi kan illustrere situasjonen med diagrammet nedenfor; en $m \times n$-matrise A transformerer vektorer $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$ til vektorer $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^m$:

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbf{y} = A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$$

I mange situasjoner må vi foreta flere transformasjoner etter hverandre. Neste diagram viser en slik situasjon; først transformeres $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ til $\mathbf{y} = B\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ved hjelp av matrisen B, og deretter transformeres $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ til $\mathbf{z} = A\mathbf{y} = A(B\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ ved hjelp av matrisen A:

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \xrightarrow{B} \mathbf{y} = B\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbf{z} = A\mathbf{y} = A(B\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$$

Det er naturlig å spørre om det finnes en matrise C som tar oss direkte fra $\mathbf{x}$ til $\mathbf{z}$ uten å gå veien om $\mathbf{y}$, dvs. slik at $\mathbf{z} = C\mathbf{x}$. Neste diagram viser hvordan en slik C vil fungere:

$$\begin{tikzcd} \mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \arrow[r, "B"] \arrow[rr, bend right, "C"'] & \mathbf{y} = B\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbf{z} = A\mathbf{y} = A(B\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m \\ & & C\mathbf{x} \arrow[u, equal] \end{tikzcd}$$

Det viser seg at det eksisterer en slik matrise C, og vi skal nå finne den. Før vi begynner kan det være greit å bestemme dimensjonene til de tre matrisene våre A, B og C. Vi ser at A transformerer vektorer i $\mathbb{R}^n$ til vektorer i $\mathbb{R}^m$, og det betyr at A er en $m \times n$-matrise. Tilsvarende transformerer B vektorer i $\mathbb{R}^k$ til vektorer i $\mathbb{R}^n$, og det betyr at B er en $n \times k$-matrise. Den ukjente matrisen C skal transformere vektorer i $\mathbb{R}^k$ til vektorer i $\mathbb{R}^m$, og må derfor være en $m \times k$-matrise. Vi har derfor

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

som våre kjente matriser, og

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix}$$

som vår ukjente matrise. Hvis $\mathbf{x}$ er vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix},$$

ser vi at

$$\mathbf{y} = B\mathbf{x} = \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1k}x_k \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2k}x_k \\ \vdots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \cdots + b_{nk}x_k \end{pmatrix}$$

Ser vi på den j-te raden i denne ligningen, får vi $y_j = b_{j1}x_1 + b_{j2}x_2 + \cdots + b_{jk}x_k$. Vi har også

$$\mathbf{z} = A\mathbf{y} = \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n \end{pmatrix}$$

og setter vi $y_j = b_{j1}x_1 + b_{j2}x_2 + \cdots + b_{jk}x_k$ inn i dette uttrykket, ser vi at den i-te komponenten til $\mathbf{z}$ er gitt ved

$$z_i = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n = a_{i1}(b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1k}x_k) +$$

$$+ a_{i2}(b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2k}x_k) + \cdots + a_{in}(b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \cdots + b_{nk}x_k)$$

Samler vi alle x_1-ledd for seg, alle x_2-ledd for seg osv, får vi:

$$\begin{aligned} z_i &= (a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \cdots + a_{in}b_{n1})x_1 + \\ &+ (a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \cdots + a_{in}b_{n2})x_2 + \cdots \\ &+ (a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk})x_k \end{aligned}$$

På den annen side: hvis vi tenker oss at $\mathbf{z}$ fremkommer direkte fra $\mathbf{x}$ ved bruk av matrisen C, har vi

$$\mathbf{z} = C\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1k}x_k \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2k}x_k \\ \vdots \\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \cdots + c_{mk}x_k \end{pmatrix}$$

dvs. at den i-te komponenten til z er gitt ved

$$z_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{ik}x_k$$

(for alle $\vec{x}$)

Skal de to uttrykkene for z_i være like, må vi ha

$$c_{i1} = a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \cdots + a_{in}b_{n1}$$

$$c_{i2} = a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \cdots + a_{in}b_{n2}$$

osv. ned til

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$$

Generelt har vi altså

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Legg merke til at dette er skalarproduktet av den i-te raden i A med den j-te søylen i B.

La oss oppsummere. Vi har vist at den matrisen

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix}$$

som i én operasjon utfører den samme transformasjonen som B etterfulgt av A, er gitt ved

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Siden det å transformere vektorer er det viktigste matriser gjør, tar vi denne formelen som utgangspunkt for vår definisjon av matriseprodukt.

Definisjon 1.6.1 *Anta at A er en $m \times n$-matrise og at B er en $n \times k$-matrise. Da er* matriseproduktet *$C = AB$ definert som $m \times k$-matrisen C med komponenter*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Vi får altså den ij-te komponenten i C ved å ta skalarproduktet av den i-te raden i A med den j-te søylen i B.

Figuren viser grafisk hvordan vi finner det ij-te elementet i produktmatrisen C: Vi tar skalarproduktet av den i-te raden i A med den j-te søylen i B:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

Bemerkning: Det er en annen måte å tenke på matriseproduktet AB på som er nyttig i mange sammenhenger. Dersom $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ er søylene i B, skriver man ofte $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k)$. Det er lett å sjekke at

$$AB = (A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, \ldots, A\mathbf{b}_k)$$

Vi får altså søylene i AB ved å gange søylene i B med A.

Legg merke til at matriseproduktet AB bare er definert når A og B passer sammen i størrelse: radene i A må være like lange som søylene i B. Dette betyr at den "siste" dimensjonen n i $m \times n$-matrisen A er lik den "første" dimensjonen n i $n \times k$-matrisen B. Legg merke til at hvis vi stryker de to n-ene i $m \times n$ og $n \times k$, sitter vi igjen med størrelsen $m \times k$ til produktmatrisen C.

Eksempel 1: Regn ut AB når

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Siden A er en 3×2 og B er 2×3-matrise, eksisterer produktet og er en 3×3-matrise. Vi får

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) & 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 \\ 1 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) & 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 \\ 4 \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) & 4 \cdot (-3) + (-2) \cdot 4 & 4 \cdot 2 + (-2) \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 6 & 19 \\ 5 & -7 & -3 \\ 18 & -20 & -2 \end{pmatrix}$$

♣

Legg merke til at selv i de tilfellene hvor AB er definert, kan vi ikke nødvendigvis regne ut BA. Her prøver vi nemlig å multiplisere en $n \times k$-matrise med en $m \times n$-matrise, og det er bare mulig når $k = m$. Selv i de tilfellene hvor både AB og BA er definert, er de som regel forskjellige. Her er et eksempel.

Eksempel 2: Regn ut AB og BA når

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Vi får

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-3) + 1 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \\ (-1) \cdot (-3) + 4 \cdot 4 & (-1) \cdot 2 + 4 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$$

og

$$BA = \begin{pmatrix} (-3)\cdot 2 + 2\cdot(-1) & (-3)\cdot 1 + 2\cdot 4 \\ 4\cdot 2 + 5\cdot(-1) & 4\cdot 1 + 5\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ 3 & 24 \end{pmatrix}$$

Vi har altså $AB \neq BA$. ♣

Regneregleln $ab = ba$ (som altså ikke gjelder for matriser!) kalles for *den kommutative lov*. Siden matrisemultiplikasjon ikke oppfyller denne regelen, sier vi at matriseproduktet er *ikke-kommutativt*. Vi har tidligere sett at vektorproduktet ikke er kommutativt (det er heller ikke skalarproduktet for komplekse n-tupler), men der har vi i hvert fall en grei regel for sammenhengen mellom $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ og $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$, nemlig at $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$. Det har vi ikke for multiplikasjon av matriser; kjenner vi AB, har vi fortsatt ingen anelse om hva BA er!

Det tar tid å vende seg til ikke-kommutative operasjoner, og det eneste rådet vi kan gi er: Vær forsiktig og begrunn hvert eneste skritt når du regner med slike operasjoner! Heldigvis er det mange regneregler som fortsatt gjelder for matriseprodukter:

Setning 1.6.2 (Regneregler for matrisemultiplikasjon) *I hvert av punktene nedenfor antar vi at A, B og C er matriser slik at regneoperasjonene er definert.*

(i) $(AB)C = A(BC)$

(ii) $A(B + C) = AB + AC$

(iii) $(B + C)A = BA + CA$

(iv) $(sA)B = A(sB) = s(AB)$ *for alle tall s*

(v) $(AB)^T = B^T A^T$

Bevis: Alle disse påstandene kan bevises ved rett og slett å gange ut venstre og høyre side av likhetene og sjekke at svarene er like. Vi tar (i) og (v) som eksempler — de andre punktene er atskillig enklere enn (i):

! * (i) Som allerede nevnt kan dette punktet bevises ved å gange ut begge sider og sjekke at svarene er lik, men det involverer mye regning med lange uttrykk. Vi skal derfor benytte en litt annen metode.

La oss gjøre en liten observasjon først: Dersom vi skal vise at to matriser M og N (med samme dimensjoner) er like, er det nok å sjekke at $M\mathbf{x} = N\mathbf{x}$

for alle vektorer $\mathbf{x}$. For å se hvorfor, la

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

alignment?

være den i-te enhetsvektoren (dvs. vektoren med 1 i i-te koordinat og 0'er overalt ellers). Da er $M\mathbf{x}$ og $N\mathbf{x}$ lik den i-te søylen i henholdsvis M og N, og siden de er like for alle i, må M og N være like.

Det holder dermed å vise at $((AB)C)\mathbf{x} = (A(BC))\mathbf{x}$ for alle vektorer $\mathbf{x}$. Grunnen til at disse uttrykkene er like, er at begge representerer resultatet av først å gange $\mathbf{x}$ med C, deretter gange resultatet med B og så gange resultatet av dette igjen med A. For å se at dette virkelig er tilfellet, må vi sjekke hva uttrykkene står for: $((AB)C)\mathbf{x}$ er den vektoren vi får dersom vi ganger $\mathbf{x}$ med produktet $(AB)C$, og per definisjon av matriseproduktet er det samme som vi får om vi først ganger $\mathbf{x}$ med C og deretter ganger resultatet med AB. Altså er $((AB)C)\mathbf{x} = (AB)(C\mathbf{x})$. Men $(AB)(C\mathbf{x})$ er resultatet av å gange vektoren $C\mathbf{x}$ med produktet AB, og det er det samme som vi får ved å gange $C\mathbf{x}$ først med B og deretter med A. Altså er $(AB)(C\mathbf{x}) = A(B(C\mathbf{x}))$. Alt i alt har vi dermed $((AB)C)\mathbf{x} = A(B(C\mathbf{x}))$.

Vi kan gjennomføre et tilsvarende resonnement for $(A(BC))\mathbf{x}$. Denne vektoren fremkommer ved at vi ganger $\mathbf{x}$ med produktet av A og BC, og det er det samme som først å gange $\mathbf{x}$ med BC og deretter gange resultatet med A. Altså er $(A(BC))\mathbf{x} = A((BC)\mathbf{x})$. Per definisjon av matriseproduktet er $(BC)\mathbf{x} = B(C\mathbf{x})$, og dermed har vi $(A(BC))\mathbf{x} = A(B(C\mathbf{x}))$.

Vi har nå vist at både $((AB)C)\mathbf{x}$ og $(A(BC))\mathbf{x}$ er lik $A(B(C\mathbf{x}))$, og følgelig er $((AB)C)\mathbf{x} = (A(BC))\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x}$. Dermed er (i) bevist.

(v) Anta at A er en $m \times n$-matrise og at B er en $n \times k$-matrise. Da er A^T en $n \times m$-matrise og B^T en $k \times n$-matrise, så både $(AB)^T$ og $B^T A^T$ er $k \times m$-matriser. Det ij-te elementer i $C = (AB)^T$ er lik det ji-te elementet i AB, dvs:

$$c_{ij} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jn}b_{ni}$$

På den annen side fremkommer det ij-te elementet i $D = B^T A^T$ ved at vi tar skalarproduktet av den i-te raden i B^T med den j-te søylen i A^T. Men den i-te raden i B^T er den i-te søylen i B, og den j-te søylen i A^T, er den j-te raden i A, så dette blir skalarproduktet mellom den j-te raden i A og den i-søylen i B, dvs.

$$d_{ij} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jn}b_{ni}$$

Altså er $c_{ij} = d_{ij}$, og beviset er fullført. □

Regnereglene ovenfor gjør det enklere å regne med matriser, men vi må som sagt være forsiktige med en del ting — spesielt at vi ikke bytter om på rekkefølgen av matrisene (husk at vanligvis er AB ulik BA). Vi kan heller ikke forkorte matriser på vanlig måte — å forkorte betyr egentlig å multiplisere med et inverst element, og foreløpig vet vi ingen ting om inverse matriser.

(som sagt på side 41)

La oss ta med oss en liten observasjon. Dersom A er en $m \times n$-matrise og $\mathbf{b}$ er en søylevektor med n-komponenter, kan vi danne produktet $A\mathbf{b}$ på to måter — vi kan enten tenke på det som produktet av matrisen A og vektoren $\mathbf{b}$ slik vi definerte det i forrige seksjon, eller vi kan tenke på det som produktet av $m \times n$-matrisen A med $n \times 1$-matrisen

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

slik vi har definert det i denne seksjonen. Det er lett å se at disse to måtene gir akkurat samme svar. Dette betyr at vi kan bruke regnereglene ovenfor også når noen av matrisene er vektorer.

Vi avslutter denne seksjonen med en ulikhet som vi vil få bruk for i neste kapittel. Hvis

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

er en $m \times n$-matrise, definerer vi *normen til* A til å være

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

(vi legger altså sammen kvadratene a_{ij}^2 av alle leddene og tar kvadratroten til summen).

Setning 1.6.3 *Hvis A er en $m \times n$-matrise og $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, så er*

$$|A\mathbf{x}| \leq \|A\|\,|x|$$

Med andre ord: Når vi ganger vektoren $\mathbf{x}$ med matrisen A, så øker lengden maksimalt med en faktor $\|A\|$.

Bevis: La $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Da er

$$|A\mathbf{x}| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_m^2}$$

der $y_1, y_2, \ldots, y_m$ er komponentene til $\mathbf{y}$. Dersom $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ er den i-te linjen i A, vet vi at $y_i = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x}$. Ifølge Schwarz' ulikhet er dermed $|y_i| \leq |\mathbf{a}_i||\mathbf{x}|$. Kvadrerer vi, får vi $y_i^2 \leq |\mathbf{a}_i|^2|\mathbf{x}|^2$. Setter vi dette inn i uttrykket for $A\mathbf{x}$, ser vi at

$$|A\mathbf{x}| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_m^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{|\mathbf{a}_1|^2|x|^2 + |\mathbf{a}_2|^2|x|^2 + \cdots + |\mathbf{a}_m|^2|x|^2} =$$

$$= \sqrt{|\mathbf{a}_1|^2 + |\mathbf{a}_2|^2 + \cdots + |\mathbf{a}_m|^2}\,|\mathbf{x}| = \|A\|\,|\mathbf{x}|$$

→ x boldface ×3

der vi har brukt at

$$\sqrt{|\mathbf{a}_1|^2 + |\mathbf{a}_2|^2 + \cdots + |\mathbf{a}_m|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2} = \|A\|$$

□

Bemerkning: $|A|$ er normalt ikke det *minste* tallet slik at $|A\mathbf{x}| \leq |A||\mathbf{x}|$ for alle $\mathbf{x}$. Vi skal komme tilbake til denne problemstillingen i seksjon 5.2. ‖A‖ ‖A‖

MATLAB-kommentar: Har du skrevet inn to matriser A og B med passende dimensjoner, får du MATLAB til å regne ut produktet ved å skrive `A*B`.

Oppgaver til seksjon 1.6

1. Regn ut AB og BA når

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2. Regn ut AB når

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Regn ut AB når

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ og } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. a) Hvilken dimensjon har produktmatrisen AB hvis A er en 8×6-matrise og B er en 6×9-matrise?

b) Hvilken dimensjon har matrisen B hvis A er en 4×3-matrise og produktmatrisen AB er en 4×5-matrise?

c) Hvor mange søyler har matrisen B hvis produktet AB er en 5×7-matrise?

5. Gitt følgende matriser:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 8 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \text{ og } C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 0 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Regn ut følgende uttrykk hvis det er definert (hvis uttrykket ikke er definert, skal du begrunne hvorfor):

a) AB
b) AC
c) $A(B+C)$
d) $(BC)^T$
e) B^TC^T
f) $(A+C^T)B$
g) $B(A^T - 2C)$

6. Gitt matrisene

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ og } D = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sjekk at $AB = AC$ selv om $B \neq C$. Sjekk også at $AD = 0$ selv om $A \neq 0$ og $D \neq 0$.

7. Gitt matrisene $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ og $E = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 8 & 2 & 8 \\ 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

Finn første rad i produktmatrisen DE. Finn deretter andre søyle i produktmatrisen DE.

8. a) Hvis første og andre søyle i matrisen B er like, hva kan du si om første og andre søyle i produktmatrisen AB (dersom AB er definert)?

b) Hvis andre søyle i matrisen B bare består av nuller, hva kan du si om andre søyle i produktmatrisen AB?

9. Finn normen $\|A\|$ til matrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Dersom A er en $n \times n$-matrise (dvs. har like mange rader og søyler) definerer vi potensene A^k på vanlig måte: $A^2 = AA$, $A^3 = AA^2$, $A^4 = AA^3$ osv. Regn ut A^2 og A^3 når $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. La $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Finn $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$.

b) Regn ut $C = AB$.

c) Regn ut både $A\mathbf{y}$ og $C\mathbf{x}$. Sammenlign resultatene.

12. I en barnehage kjører barna sanden frem og tilbake i trillebår mellom tre sandkasser A, B og C (og mister noe på veien!). Av den sanden som er i sandkasse A ved begynnelsen av dagen, vil 70% være i A ved slutten av dagen, 15% vil være i B, 10% i C (og resten vil være mistet). Av den sanden som starter dagen i B, vil 75% være i B ved slutten av dagen, 5% vil være i A og 10% i C. Av den sanden som startet i C, vil 70% være i C ved slutten av dagen, 10% vil være i A og 15% i B.

a) Finn en matrise M slik at hvis x, y, z er henholdsvis antall liter sand i A, B og C ved begynnelsen av dagen, og $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, så angir komponentene til $\mathbf{v} = M\mathbf{u}$ hvor mange liter sand det er i hver kasse ved slutten av dagen.

b) Etter at barna har gått hjem, forsøker personalet å fordele sanden på nytt. De flytter 20% av sanden i B til A og 5% av sanden i C til B. Finn en matrise N slik at komponentene til $\mathbf{w} = N\mathbf{v}$ angir hvor mye sand det nå er i hver sandkasse.

c) Regn ut $K = NM$. Anta at fordeling ved begynnelsen av dagen var $x = 200$, $y = 300$, $z = 400$. Finn fordelingen på slutten av dagen etter at personalet har omfordelt sanden.

d) Hvor mye sand vil det være i hver kasse på slutten av neste dag dersom den forløper på tilsvarende måte?

13. Bevis punktene (ii), (iii) og (iv) i setning 1.6.2.

14. Bruk MATLAB til å løse oppgavene 1-3.

1.7 Identitetsmatriser og inverse matriser

I denne seksjonen skal vi bare arbeide med *kvadratiske* matriser, dvs. matriser med like mange rader som søyler. Matrisene vil altså være $n \times n$-matriser for et helt tall n. En spesiell slik matrise er *identitetsmatrisen*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

som har 1-ere på diagonalen og 0-er overalt ellers. Ganger du en annen $n \times n$-matrise A med I_n (gjør det!), ser du at

$$AI_n = A \quad \text{og} \quad I_nA = A$$

Uansett om vi multipliserer A med I_n fra høyre eller venstre, får vi altså A tilbake. Blant tall er det bare 1 som har en tilsvarende egenskap; ganger vi et tall med 1, får vi tallet tilbake. Identitetsmatrisen I_n spiller derfor mye av den samme rollen for matrisemultiplikasjon som 1 gjør for vanlig multiplikasjon.

Et tall $a \neq 0$ har alltid et inverst tall a^{-1}. Dette tallet er definert ved at produktet av a og a^{-1} er lik 1, dvs. $aa^{-1} = 1$. Vi kan på tilsvarende måte definere inverse matriser:

Definisjon 1.7.1 *Anta at A er en $n \times n$-matrise. En $n \times n$-matrise X kalles en* invers matrise *til A dersom*

$$AX = XA = I_n$$

(siden matrisemultiplikasjon ikke er kommutativ, krever vi å få I_n som svar uansett hvilken side vi multipliserer fra).

Som allerede nevnt har alle tall bortsett fra 0 en invers. For matriser er det mer komplisert; det finnes mange matriser som ikke har invers! Vi skal komme tilbake til spørsmålet om når en matrise har en invers etter hvert, men foreløpig nøyer vi oss med å vise noe enklere — nemlig at ingen matrise har mer enn én invers.

Setning 1.7.2 *En $n \times n$-matrise har høyst én invers.*

Bevis: Anta at både X og Y er inverser til A. Da har vi

$$X = I_nX = (YA)X = Y(AX) = YI_n = Y$$

Altså er de to inversene like. ♣

Nå som vi vet at det finnes høyst én invers, kan vi være mer konkrete i språkbruken.

Definisjon 1.7.3 *En $n \times n$-matrise A kalles* inverterbar *dersom den har en invers, og den inverse matrisen betegnes med A^{-1}. En matrise som ikke er inverterbar, kalles* singulær.

Selv om vi ikke skal utvikle noen teori for hvordan man finner inverse matriser på det nåværende tidspunkt (det får vente til kapittel 4) er det instruktivt å se på noen enkle eksempler.

Eksempel 1: Finn den inverse matrisen til

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Vi må finne en 2×2-matrise $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$ slik at $AX = I_2$ og $XA = I_2$. Siden

$$AX = \begin{pmatrix} 3x - z & 3y - u \\ x + 2z & y + 2u \end{pmatrix}$$

kan ligningen $AX = I_2$ skrives

$$\begin{pmatrix} 3x - z & 3y - u \\ x + 2z & y + 2u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dette gir oss fire ligninger med fire ukjente

$$\begin{aligned} 3x - z &= 1 \\ 3y - u &= 0 \\ x + 2z &= 0 \\ y + 2u &= 1 \end{aligned}$$

Dette ligningssystemet er lett å løse (legg merke til at vi har to ligninger som bare inneholder x og z, og to som bare inneholder y og u), og vi får $x = \frac{2}{7}$, $y = \frac{1}{7}$, $z = -\frac{1}{7}$ og $u = \frac{3}{7}$. Dette betyr at

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

tilfredsstiller ligningen $AX = I_2$. Vi må også sjekke at X tilfredsstiller det andre kravet til en invers matrise, nemlig at $XA = I_2$:

$$XA = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \cdot 3 + \frac{1}{7} \cdot 1 & \frac{2}{7} \cdot (-1) + \frac{1}{7} \cdot 2 \\ -\frac{1}{7} \cdot 3 + \frac{3}{7} \cdot 1 & -\frac{1}{7} \cdot (-1) + \frac{3}{7} \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siden vi nå har vist at A er inverterbar og at

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

er oppgaven vår fullført. $\clubsuit$

kanskje?

Bemerkning: Det kan virke som vi har flaks på slutten av eksemplet ovenfor når vi sjekker at $XA = I_2$ — vi har laget X slik at $AX = I_2$, men siden matrisemultiplikasjon ikke er kommutativ, er det ingen grunn til å tro at dette vil medføre at $XA = I_2$. Det viser seg imidlertid at det alltid er slik; dersom $n \times n$-matrisen X er en *ensidig invers* til $n \times n$-matrisen A (dvs. at vi enten har $AX = I_n$ eller $XA = I_n$), så er A inverterbar og $X = A^{-1}$. Det er imidlertid forbausende vanskelig å bevise dette for generelle $n \times n$-matriser, og vi må utsette det til kapittel 4.

La oss nå se på en matrise som *ikke* har en invers:

Eksempel 2: La

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Vi forsøker å finne en invers matrise

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$$

på samme måte som i forrige eksempel, nemlig ved å kreve at $AX = I_2$. Siden

$$AX = \begin{pmatrix} x + 2z & y + 2u \\ 2x + 4z & 2y + 4u \end{pmatrix}$$

gir dette ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2z &= 1 \\ y + 2u &= 0 \\ 2x + 4z &= 0 \\ 2y + 4u &= 1 \end{aligned}$$

Det er lett å se at dette ligningssystemet ikke har løsninger; ganger vi den første ligningen med 2, får vi $2x + 4z = 2$ som er i åpenbar strid med den tredje ligningen. $\clubsuit$

De to eksemplene ovenfor viser at det er en nær sammenheng mellom invertering av matriser og lineære ligningssystemer. Vi skal komme tilbake til denne sammenhengen senere når vi skal utvikle effektive metoder for å finne inverse matriser. Foreløpig nøyer vi oss med å se på noen enkle regneregler for inverse matriser:

Setning 1.7.4 *Anta at A og B er inverterbare $n \times n$-matriser. Da er*

(i) sA inverterbar for alle tall $s \neq 0$, og $(sA)^{-1} = s^{-1}A^{-1}$

(ii) AB inverterbar, og $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(iii) A^T inverterbar, og $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ ×

(iv) A^{-1} ~~er~~ inverterbar, og $(A^{-1})^{-1} = A$

Bevis: Vi konsentrerer oss om (ii), og overlater de (enklere!) (i), (iii) og (iv) til leserne. For å bevise (ii) må vi sjekke at

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = I_n \quad \text{og} \quad (B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$$

Dette er en liten herjing i parentesflytting (husk setning 1.6.2(i)):

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= ((AB)B^{-1})A^{-1} = (A(BB^{-1}))A^{-1} = \\ &= (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n\end{aligned}$$

Helt tilsvarende får vi:

$$\begin{aligned}(B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}(AB)) = B^{-1}((A^{-1}A)B) = \\ &= B^{-1}(I_nB) = B^{-1}B = I_n\end{aligned}$$

□

formlet?

Bemerkning: Legg merke til at vi ikke har noen regler for de inverse til $A + B$ og $A - B$. Disse matrisene behøver ikke være inverterbare selv om A og B er det, og selv i de tilfellene hvor de er inverterbare, finnes det ikke noen enkel måte å finne den inverse på.

Dersom en matrise A er inverterbar, kan vi forkorte den bort i ligninger av typen $AX = AB$ og få $X = B$. Grunnen er at vi kan multiplisere fra venstre med A^{-1} på begge sider av ligningen:

$$AX = AB \Longrightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}(AB) \Longrightarrow (A^{-1}A)X = (A^{-1}A)B \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow I_nX = I_nB \Longrightarrow X = B$$

På tilsvarende måte kan vi forkorte med A i ligningen $XA = BA$ og få $X = B$ (i dette tilfellet må vi gange ligningen fra *høyre* med A^{-1}). Vi kan imidlertid *ikke* forkorte med A i ligningen $AX = BA$ — uansett om vi ganger med A^{-1} fra venstre eller høyre, vil det være en A vi ikke greier å forkorte bort.

I forrige seksjon tenkte vi på matriser som transformasjoner; når vi ganger en vektor $\mathbf{x}$ med en matrise A, transformerer vi $\mathbf{x}$ til en ny vektor $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$.

Dersom A er inverterbar, kan vi gange den siste ligningen fra venstre med den inverse matrisen A^{-1}. Vi får da

$$A^{-1}\mathbf{y} = A^{-1}(A\mathbf{x}) = (A^{-1}A)\mathbf{x} = I_n\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

Dette viser at A^{-1} er den omvendte transformasjonen til A — hvis A transformerer $\mathbf{x}$ til $\mathbf{y}$, vil A^{-1} transformere $\mathbf{y}$ til $\mathbf{x}$. Denne ideen om A^{-1} som den omvendte transformasjonen til A er viktig når man bruker matriser i praksis.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y} \arrow[r, bend left, "A"] & \mathbf{y} = A\mathbf{x} \arrow[l, bend left, "A^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Siden det finnes mange transformasjoner vi ikke kan vende om på, gir dette bildet oss en bedre forståelse av hvorfor det finnes matriser som ikke er inverterbare. Hvis det f.eks. finnes to forskjellige vektorer $\mathbf{x}$ og $\mathbf{x}'$ som transformeres til den samme vektoren $\mathbf{y}$ (dvs. vi har både $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ og $\mathbf{y} = A\mathbf{x}'$), så kan ikke transformasjonen vendes om; vi kan ikke starte med $\mathbf{y}$ og transformere den til både $\mathbf{x}$ og $\mathbf{x}'$!

MATLAB-kommentar: Det er en egen kommando for identitetsmatrisen I_n i MATLAB — du skriver `>>eye(n)` (der n er tallet du ønsker). Den inverse matrisen til A får du ved å skrive `>>inv(A)`.

Forklare "eye" praktisk?

Oppgaver til seksjon 1.7

1. La $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Kontroller at $AI_2 = A$ og $I_2A = A$ ved å gjennomføre utregningene.

2. La $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$. Vis at $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ er den inverse matrisen til A ved å regne ut AB og BA.

3. Avgjør om følgende matriser er inverterbare eller singulære:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \text{ og } D = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

4. En inverterbar matrise A har en invers matrise som er gitt ved $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Finn matrisen A.

5. Gitt to inverterbare matriser A og B, hvor $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ og $B^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Finn $(AB)^{-1}$.

6. a) La $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vis at $I_2\mathbf{a} = \mathbf{a}$.

b) La $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Vis at $I_3\mathbf{b} = \mathbf{b}$.

c) Vis at $I_n\mathbf{c} = \mathbf{c}$ for alle $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$.

7. a) Anta at $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ der $a, b \neq 0$. Vis at A er inverterbar og at $A^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}$.

b) Anta at $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ der $a, b, c \neq 0$. Vis at B er inverterbar og at $B^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & b^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$.

c) Formuler et tilsvarende resultat for $n \times n$-matriser.

8. Vis at dersom A og B er inverterbare, så er den inverse til $(AB)^T$ lik $(A^{-1})^T(B^{-1})^T$.

9. Bevis punktene (i), (iii) og (iv) i setning 1.6.4.

10. a) Vis at 2×2-matrisen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ er inverterbar hvis og bare hvis $ad - bc \neq 0$, og at den inverse matrisen i så fall er gitt ved $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

b) Bruk formelen fra punkt a) til å finne den inverse til matrisen $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

c) Bruk matrisen du fant i punkt b) til å løse ligningssystemet

$$2x - 5y = 3$$

$$-x + 3y = 2$$

Hint: Systemet kan skrives $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

11. Bruk MATLAB til å finne den inverse matrisen til A i oppgave 2.

12. Be MATLAB om å invertere matrisene i oppgave 3. Hva skjer i de tilfellene matrisen ikke er inverterbar?

1.8 Determinanter, arealer og volumer

Til enhver $n \times n$-matrise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

hører det et tall som kalles *determinanten* til A, og som betegnes med

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Generelle $n \times n$-determinanter kan være litt vanskelige å forstå seg på, så vi skal derfor begynne med 2×2- og 3×3-determinanter og deres geometriske egenskaper.

Hvis A er en 2×2-matrise

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

så er *determinanten* til A definert ved

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Forklare "diagonalene"

Legg merke til at uttrykket $ad - bc$ fremkommer fra diagonalene i matrisen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; ganger vi sammen tallene i den ene diagonalen, får vi ad, og ganger vi sammen tallene i den andre diagonalen, får vi bc.

La oss regne ut en determinant.

Eksempel 1: Vi ser at

$$\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 2 - (-5) \cdot 4 = -6 + 20 = 14 \qquad \clubsuit$$

Dersom vi har to vektorer $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, kan vi lage en 2×2-determinant $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ved å legge inn vektorene som radene i en matrise på denne måten:

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

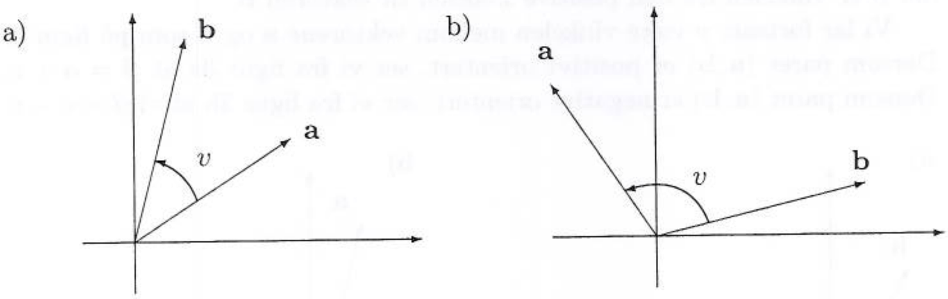
Legg merke til at dersom vi bytter om rekkefølgen på vektorene **a** og **b**, så skifter determinanten fortegn:

$$\det(\mathbf{b},\mathbf{a}) = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = b_1a_2 - b_2a_1 = -(a_1b_2 - a_2b_1) = -\det(\mathbf{a},\mathbf{b})$$

Som vi snart skal se, har både fortegnet og størrelsen til $\det(\mathbf{a},\mathbf{b})$ en geometrisk betydning.

Bemerkning: Man kan lure på hvorfor vi legger inn vektorene **a** og **b** som rader og ikke som søyler. Det viser seg at dette ikke spiller noen rolle siden $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, men vi har valgt å ta utgangpunkt i rader siden det passer best til anvendelsene i senere kapitler (for andre anvendelser hadde det passet vel så bra å bruke søyler!).

Notasjonen $(\vec{a},\vec{b})$ er snudd på side 49 i søyleforstand.



Figur 1: Vinkelen v mellom **a** og **b**

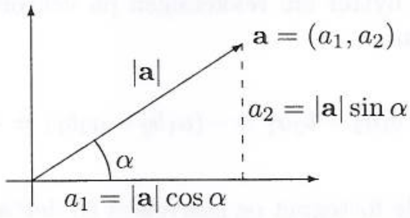
For å forstå den geometriske tolkningen av 2×2-determinanter, er det nyttig å vite litt om orientering av vektorpar. To vektorer **a** og **b** bestemmer en vinkel v mellom $0°$ og $180°$ som vist på figur 1. Vi kaller dette *vinkelen mellom* **a** *og* **b**. Legg merke til at dersom vi beveger oss i positiv omløpsretning, vil denne vinkelen noen ganger starte i **a** og ende i **b** (se figur 1a) og andre ganger starte i **b** og ende i **a** (se figur 1b). I det første tilfellet sier vi at paret $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ er *positivt orientert*, i det andre tilfellet at det er *negativt orientert*. Her er åpenbart rekkefølgen til vektorene viktig — **a** er første vektor og **b** er andre vektor. Bytter vi om rekkefølgen av vektorene, bytter vi også orientering.

$(\neq \vec{0})$

For å studere den geometriske tolkningen av determinanten

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

lønner det seg å skrive vektorene $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ på polarform.



Figur 2: Vektoren $\mathbf{a}$ på polarform

Lar vi α være vinkelen fra den positive x-aksen til vektoren $\mathbf{a}$, så er

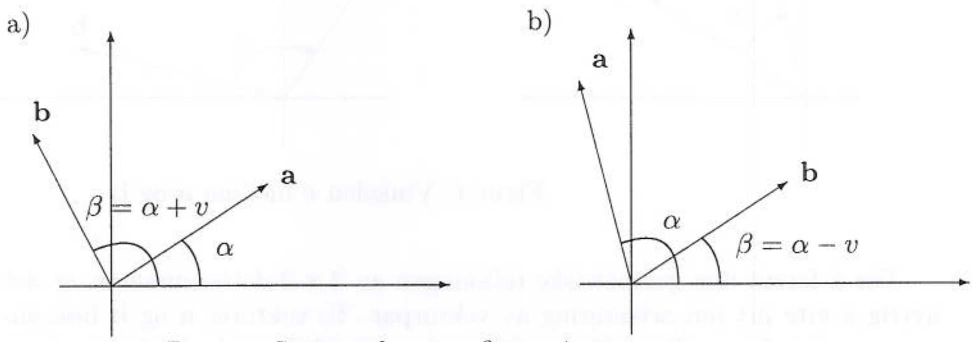
$$\mathbf{a} = (|\mathbf{a}| \cos \alpha, |\mathbf{a}| \sin \alpha)$$

(se figur 2 og husk det du har lært om polarform til komplekse tall). På tilsvarende måte er

$$\mathbf{b} = (|\mathbf{b}| \cos \beta, |\mathbf{b}| \sin \beta)$$

der β er vinkelen fra den positive x-aksen til vektoren $\mathbf{b}$.

Vi lar fortsatt v være vinkelen mellom vektorene $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ som på figur 1. Dersom paret $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er positivt orientert, ser vi fra figur 3a at $\beta = \alpha + v$. Dersom paret $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er negativt orientert, ser vi fra figur 3b at vi $\beta = \alpha - v$.



Figur 3: Sammenhengen $\beta = \alpha \pm v$

Vi har altså

$$\beta = \alpha \pm v$$

der fortegnet er pluss eller minus ettersom paret $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er positivt eller negativt orientert.

La oss nå finne determinanten uttrykt ved α og β:

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |\mathbf{a}| \cos \alpha & |\mathbf{a}| \sin \alpha \\ |\mathbf{b}| \cos \beta & |\mathbf{b}| \sin \beta \end{vmatrix}$$

$$= |\mathbf{a}| \cos \alpha |\mathbf{b}| \sin \beta - |\mathbf{a}| \sin \alpha |\mathbf{b}| \cos \beta$$

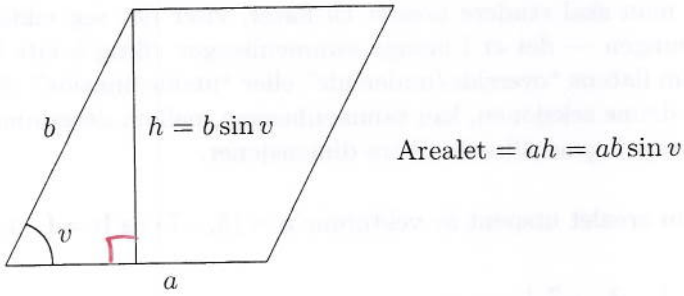
$$= |\mathbf{a}||\mathbf{b}|(\sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha)$$

$$= |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\beta - \alpha)$$

der vi i den siste overgangen har brukt formelen for sinus til en differens. Siden $\beta = \alpha \pm v$, får vi

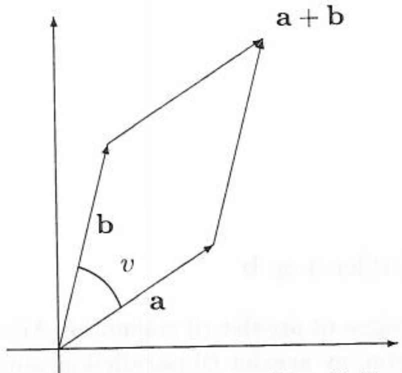
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\pm v) = \pm|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin v$$

Siden $\sin v$ aldri er negativ (v ligger per definisjon i intervallet $[0°, 180°]$ der sinus er positiv), vil $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ altså være positiv dersom paret $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er positivt orientert, og negativ dersom dette paret er negativt orientert. Fortegnet til determinanten $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ gjenspeiler altså orienteringen til paret $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Legg forøvrig merke til at $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er 0 dersom v er 0° eller 180°, det vil si når $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er parallelle. (eller 0)



Figur 4: Arealet til et parallellogram

Etter at vi nå har funnet ut hva fortegnet til determinanten betyr, er det på tide å se på absoluttverdien. Aller først repeterer vi formelen for arealet til et parallellogram. Som det fremgår fra figur 4, er dette arealet gitt ved $A = ab\sin v$, der a og b er lengdene til sidene, og der v er vinkelen mellom dem (på figuren er vinkel v spiss, men det er lett å se at resultatet også holder dersom vinkelen er stump).



Figur 5: Parallellogrammet utspent av $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$

Arealet til parallellogrammet utspent av vektorene $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ (se figur 5) er derfor lik $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin v = \pm \det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ der fortegnet er pluss eller minus ettersom $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er positivt eller negativt orientert. Det betyr at arealet er lik tallverdien til determinanten. La oss oppsummere resultatene.

Setning 1.8.1 *Determinanten*

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

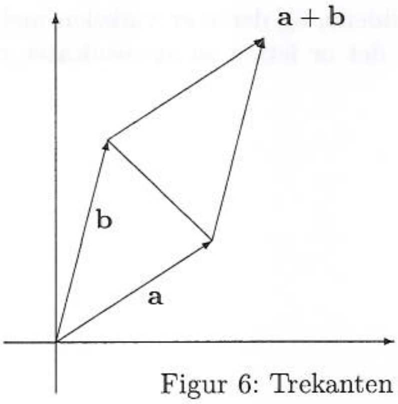
er positiv dersom vektorparet $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *er positivt orientert og negativ dersom paret er negativt orientert. Arealet til parallellogrammet utspent av* $\mathbf{a}$ *og* $\mathbf{b}$ *er lik tallverdien til determinanten.*

Bemerkning: Matematikere sier at determinanten gir oss arealet med fortegn (eller orientering). Det kan virke merkelig å knytte fortegn til areal, men spesielt når man skal studere arealet til flater, viser det seg viktig å holde styr på retningen — det er i mange sammenhenger viktig å vite hva man skal regne som flatens "overside/underside" eller "utside/innside". Som vi skal se senere i denne seksjonen, kan sammenhengen mellom determinant og "areal med fortegn" generaliseres til tre dimensjoner.

Eksempel 2: Finn arealet utspent av vektorene $\mathbf{a} = (3, -7)$ og $\mathbf{b} = (-4, 5)$. Vi får

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-7) \cdot (-4) = 15 - 28 = -13$$

Arealet er dermed $|-13| = 13$. Siden $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er negativ, er paret $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ negativt orientert, dvs. at vinkelen fra $\mathbf{a}$ til $\mathbf{b}$ er større enn $180°$. ♣



Figur 6: Trekanten med sider $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$

Determinanter kan også brukes til å regne ut arealet til trekanter. Arealet til trekanten med sider $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er halvparten av arealet til parallellogrammet utspent av disse vektorene (se figur 6).

Vi har derfor følgende resultat:

Korollar 1.8.2 *Arealet til trekanten med sider* $\mathbf{a}$ *og* $\mathbf{b}$ *er* $\frac{1}{2} \cdot |\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})|$

Eksempel 3: Finn arealet til trekanten med hjørner i punktene $\mathbf{c} = (-1, 2)$, $\mathbf{d} = (4, 8)$ og $\mathbf{e} = (2, -3)$. Vi regner ut

$$\mathbf{a} = \mathbf{d} - \mathbf{c} = (4, 8) - (-1, 2) = (5, 6)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{e} - \mathbf{c} = (2, -3) - (-1, 2) = (3, -5)$$

Trekanten vi er på jakt etter, har samme areal som trekanten med sider $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ (hvorfor?). Dermed er

$$\text{Areal} = \frac{1}{2} \cdot |\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot |-25 - 18| = \frac{43}{2} \quad \clubsuit$$

Før vi går over til 3×3-determinanter, tar vi med et resultat til. Dette resultatet kan virke litt underlig på det nåværende tidspunkt, men det skal bli en viktig inspirasjonskilde når vi studerer generelle $n \times n$-determinanter i et senere kapittel.

Setning 1.8.3 *For* 2×2*-matriser gjelder:*

(i) $\det(I_2) = 1$ *(husk at* I_2 *er identitetsmatrisen* $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*).*

(ii) Dersom vi bytter om to rader, så bytter determinanten fortegn (dvs. $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\det(\mathbf{b}, \mathbf{a})$*).*

(iii) Dersom vi ganger alle elementene i en rad med et tall s*, så forandrer også matrisen seg med en faktor* s *(dvs.* $\det(s\mathbf{a}, \mathbf{b}) = s\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *og* $\det(\mathbf{a}, s\mathbf{b}) = s\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$*).* in

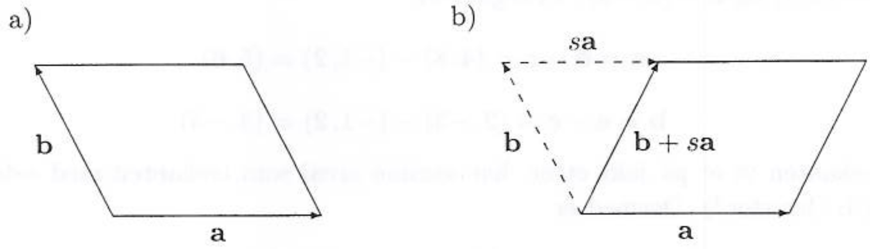
(iv) Dersom vi adderer et tall ganger en rad til en av de andre radene, endrer ikke determinanten verdi (dvs. $\det(\mathbf{a} + s\mathbf{b}, \mathbf{b}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *og* $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b} + s\mathbf{a}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$*).*

Bevis: Alle punktene kan vises ved direkte utregning, men vi vil gjerne forstå dem geometrisk selv om det i noen tilfeller er litt mer omstendelig:

(i) Parallellogrammet utspent av radvektorene $\mathbf{a} = (1, 0)$ og $\mathbf{b} = (0, 1)$ er et kvadrat med side 1. Arealet er opplagt 1, og siden paret $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er positivt orientert, er $\det(I_2) = 1$).

(ii) Bytter vi om på radene, bytter vi orientering på paret $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, og determinanten bytter dermed fortegn.

(iii) Ganger vi den ene vektoren med et positivt tall s, blir enten grunnlinjen eller høyden i det utspente parallellogrammet ganget med s, og arealet øker/avtar derfor med en faktor s. Ganger vi med et negativt tall, endres høyden eller grunnlinjen med en faktor $|s|$, men i tillegg bytter vektorparet orientering slik at også i dette tilfellet endrer determinanten seg med en faktor s.



Figur 7: Parallellogrammene utspent av henholdsvis $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ og $\mathbf{a}, \mathbf{b} + s\mathbf{a}$

(iv) Her trenger vi en liten figur. Figur 7a viser parallellogrammet utspent av $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$, mens figur 7b viser parallellogrammet utspent av $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b} + s\mathbf{a}$. De to parallellogrammene har samme grunnlinje og høyde, og derfor samme areal. Det er også lett å se at uansett hvor stor s er, så har parene $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ og $(\mathbf{a}, \mathbf{b} + s\mathbf{a})$ samme orientering. Altså er $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b} + s\mathbf{a})$. $\square$

3×3-determinanter

Determinanten til en 3×3-matrise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

er definert ved

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

der 2×2-determinantene på høyre side regnes ut på vanlig måte. Legg merke til hvordan disse 2×2-determinantene fremkommer fra den opprinnelige determinanten — for å finne den 2×2-determinanten som ganges med a_{11}, stryker vi den linjen og den søylen som går gjennom a_{11} (se figur 8), for å finne den 2×2-determinanten som ganges med a_{12}, stryker vi den linjen og den søylen som går gjennom a_{12}, osv. Legg også merke til at fortegnene til leddene på høyre side veksler mellom pluss og minus.

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Figur 8: 2×2-determinanten som skal ganges med a_1 a_{11}

La oss regne ut en 3×3-determinant.

Eksempel 4: Regn ut

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2((-4)\cdot 2 - 0\cdot 1) - 3(5\cdot 2 - 0\cdot(-3)) + (-1)(5\cdot 1 - (-4)(-3))$$
$$= 2(-8) - 3\cdot 10 + (-1)(-7) = -16 - 30 + 7 = -39$$

♣

Det er en nær sammenheng mellom 3×3-determinanter og kryssproduktet. Som et første eksempel har vi følgende huskeregel for kryssproduktet:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

Siden vi bare har definert determinanten når elementene i første rad er tall (og ikke vektorer), gir det første skrittet i denne utregningen egentlig ikke mening, men resultatet er likevel en grei huskeregel.

Vi har tidligere sett at 2×2-determinanter kan brukes til å regne ut arealer og til å bestemme orienteringen til vektorpar $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. På tilsvarende måte kan vi bruke 3×3-determinanter til å regne ut volumer og til å bestemme orienteringen til vektortripler $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Før vi begynner, kan det være greit å bli enig om notasjonen. Dersom $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, skriver vi -e

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Vi observerer så at

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

Sammenholder vi dette med setning 1.4.4 og korollar 1.4.5, får vi:

Setning 1.8.4 *Volumet av parallellepipedet utspent av vektorene* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *er* $|\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$. *Volumet av pyramiden utspent av* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *er* $\frac{1}{6}|\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$.

Legg merke til at $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$ hvis volumet til parallellepipedet er 0. Det skjer hvis vektorene $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ ligger i samme plan gjennom origo. På det nåværende tidspunkt kan dette virke som en uvesentlig observasjon, men det viser seg faktisk å være en av hovedårsakene til determinantenes betydning.

Hva så med orienteringen? Først må vi definere når et trippel $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er positivt og negativt orientert: To ikke-parallelle vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ definerer sammen med origo et plan (planet gjennom punktene $\mathbf{0}$, $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$). Dette planet deler rommet i to halvdeler. Dersom $\mathbf{c}$ ligger på samme side av planet som kryssproduktet $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, sier vi at trippelet $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er *positivt orientert*. Dersom $\mathbf{c}$ ligger på den andre siden av planet, sier vi at trippelet er *negativt orientert*. Bruker vi den geometriske tolkningen av skalarproduktet, ser vi at trippelet $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er positivt orientert hvis og bare hvis $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ er positiv (for da er vinkelen mellom $\mathbf{c}$ og $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ mindre enn $90°$). Det er lett (men ikke særlig spennende) å sjekke at $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ (det er ikke noe mystisk i dette — både $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$ og $|\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$ er lik volumet til parallellepipedet utspent av $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$, så alt vi sjekker er at fortegnet er det samme). Dette betyr at $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er positivt orientert hvis og bare hvis $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er positiv. Vi har altså den samme forbindelsen mellom positiv orientering og positiv determinant som i det to-dimensjonale tilfellet.

Vi tar med en tredimensjonal versjon av setning 1.8.3.

Setning 1.8.5 *For* 3×3*-matriser gjelder:*

(i) $\det(I_3) = 1$ *(husk at* I_3 *er identitetsmatrisen* $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*).*

(ii) Dersom vi bytter om to rader, så bytter determinanten fortegn (det vil f.eks. si at $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -\det(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a})$*).*

en *(iii) Dersom vi ganger alle elementene i en rad med et tall s, så forandrer også matrisen seg med en faktor s (det vil f.eks. si at* $\det(\mathbf{a}, s\mathbf{b}, \mathbf{c}) = s\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$*).*

(iv) Dersom vi adderer et tall ganger en rad til en av de andre radene, endrer ikke determinanten verdi (det vil f.eks. si at $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} + s\mathbf{a}) = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$*).*

Bevis: Vi skal ikke gjennomgå punktene i detalj, bare se på hovedideene. Punkt (i) kan du bevise enten ved direkte utregning eller ved å observere at parallellogrammet utspent av vektorene $\mathbf{a} = (1,0,0)$, $\mathbf{b} = (0,1,0)$ og $\mathbf{c} = (0,0,1)$ er en terning med side 1. I punkt (ii) vet vi allerede at tallverdien til determinanten er uforandret om vi bytter om på radene (fordi begge er lik volumet til det samme parallellepipedet), og alt du behøver å sjekke er at orienteringen snur når du bytter om to vektorer (bruk høyrehåndsregelen). Punkt (iii) følger på samme måte som i det todimensjonale tilfellet; ganger du en av sidekantene i et parallellepiped med $s > 0$, øker også volumet med en faktor s, men ganger du med en faktor $s < 0$, må du også ta hensyn til at orienteringen snur. For å bevise punkt (iv) kan du bruke akkurat samme figur som i det todimensjonale tilfellet (figur 7) — den eneste forskjellen er at det nå inngår en vektor til. Denne vektoren stikker på skrå ut av (eller inn i) papiret og inngår ikke i beregningene på noen forstyrrende måte (det eneste den bidrar med er den felles høyden i parallellogrammene).

$n \times n$-determinanter

Vi skal ikke studere generelle $n \times n$-determinanter for alvor i dette kapitlet, men det kan være morsomt å vite hvordan de regnes ut. Gitt en 4×4-matrise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

definerer vi *determinanten* $\det(A)$ ved

$$\det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + $$
$$+ a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Sammenligner du denne definisjonen med definisjonen av 3×3-determinanter, vil du oppdage det generelle mønsteret som gjør at vi kan gå videre og definere 5×5-determinanter, 6×6-determinanter osv.

Vi har tidligere sett at *tallverdien* til 2×2-determinanten $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ gir oss arealet utspent av vektorene $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$, mens *fortegnet* til determinanten forteller oss om orienteringen til paret $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. På tilsvarende vis vet vi at tallverdien til en 3×3-determinant $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ gir oss volumet utspent av vektorene $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$, mens fortegnet forteller oss om orienteringen til trippelet $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Vi kan bruke disse observasjonene til å definere volum og orientering i høyere dimensjoner. Gitt n vektorer $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots$, $\mathbf{a}_n$ definerer vi *volumet* *utspent av disse vektorene* til å være tallverdien til $n \times n$-determinanten $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$. Vi sier at n-tuplet $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ (legg merke til at dette er et n-tuppel av vektorer) er *positivt* (henholdsvis *negativt*) orientert dersom determinanten er positiv (henholdsvis negativ). Vi skal ikke gå nærmere inn på volum og orientering i denne boken, men vi skal komme tilbake til generelle determinanter i kapittel 4.

Bemerkning: Som vi skal se i kapittel 4, er det en nær sammenheng mellom determinanter og inverterbarhet — det viser seg at en kvadratisk matrise A er inverterbar hvis og bare hvis $\det(A) \neq 0$. Dette er kanskje ikke så overraskende siden begge begrepene har med degenerasjon å gjøre: En kvadratisk matrise A er singulær (ikke inverterbar), dersom det finnes to forskjellige vektorer $\mathbf{x}$ og $\mathbf{x}'$ slik at $A\mathbf{x} = A\mathbf{x}'$, og den har determinant lik 0 dersom radene ikke spenner ut et volum. Det viser seg at disse to formene for degenerasjon er ekvivalente.

MATLAB-kommentar: MATLAB regner ut determinanten til A når du skriver `>>det(A)`.

Oppgaver til seksjon 1.8

1. Regn ut determinantene

$$\text{a)} \quad \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \qquad \text{b)} \quad \begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad \text{c)} \quad \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Finn arealet til parallellogrammet utspent av $\mathbf{a} = (1, 3)$ og $\mathbf{b} = (4, 1)$.

3. En trekant har hjørner i punktene $(-1, 2)$, $(4, 3)$, $(1, 7)$. Finn arealet.

4. En firkant har hjørner i punktene $(0, 1)$, $(5, 1)$, $(1, 7)$ og $(7, 4)$. Finn arealet.

5. Avgjør om parene $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er positivt eller negativt orientert:

$$\text{a)} \quad \mathbf{a} = (3, -1) \quad \mathbf{b} = (-7, 2) \qquad \text{b)} \quad \mathbf{a} = (-1, 5) \quad \mathbf{b} = (3, 2)$$

6. Vis at $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ hvis og bare hvis vektorene $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ er parallelle eller (minst) én av dem er $\mathbf{0}$.

7. Vis at $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$, dvs. at vi får den samme determinanten om vi bytter om linjer og søyler.

8. Alle hjørnene til et parallellogram har heltallige koordinater. Vis at arealet er et helt tall.

9. Anta at $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

a) Vis at ligningssystemet $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$ har løsningen

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

b) Hva skjer med ligningssystemet når $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$?

10. Regn ut determinantene:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

11. Finn volumet til parallellepipedet utspent av $(-1, 0, 2)$, $(3, -1, 3)$ og $(4, 0, -1)$.

12. Finn volumet til pyramiden med hjørner i punktene $(2, 2, 2)$, $(-1, 2, 3)$, $(3, 4, 2)$ og $(7, 2, 2)$.

13. Avgjør om trippelet $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er positivt eller negativt orientert når $\mathbf{a} = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (0, 2, 4)$ og $\mathbf{c} = (7, -1, 2)$.

14. Vis at $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, dvs. at determinanten er den samme om vi bytter om søyler og linjer.

15. Vis at dersom $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ er ortogonale, så er $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}|$.

16. Regn ut determinanten til 4×4-matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

17. I denne oppgaven er $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ og $\mathbf{d}$ tredimensjonale vektorer.

a) Vis at dersom to av vektorene $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ er like, så er $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$

b) Vis at for alle vektorer $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ og alle skalarer s, t gjelder

$$\det(s\mathbf{a} + t\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = s \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + t \det(\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

c) Vi sier at en vektor $\mathbf{a}$ er en *lineærkombinasjon* av vektorene $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ dersom det finnes skalarer s, t slik at $\mathbf{a} = s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$. Bruk a) og b) til å vise at dersom $\mathbf{a}$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$, så er $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.

d) Gi en geometrisk forklaring på resultatet i c).

18. Bevis setning 1.8.3 ved regning (dvs. regn ut begge sider av likhetene og se at de stemmer).

19. Bevis setning 1.8.5 ved regning (dvs. regn ut begge sider av likhetene og se at de stemmer).

20. Vis at en 2×2-matrise A er inverterbar hvis og bare hvis $\det(A) \neq 0$. (*Hint:* Mesteparten av jobben er gjort i oppgave 1.7.10.)

21. Bruk MATLAB til å regne ut determinantene i oppgavene 1, 10 og 16.

1.9 Lineæravbildninger

I tidligere matematikkurs har du arbeidet med funksjoner $y = f(x)$ som avbilder et tall x på et nytt tall y. Det neste kapittelet handler om funkjoner $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ som avbilder en vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ på en ny vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. I denne og den neste seksjonen skal vi tjuvstarte litt på dette studiet ved å se på noen funksjoner som er nært knyttet til matriser: lineæravbildninger og affinavbildninger.

Vi må først bli enige om hva vi skal mene med en funksjon fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$. Husk at en funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$ bare er en regel som til hvert element x i $\mathbb{R}$ tilordner et element $y = f(x)$ i $\mathbb{R}$. På tilsvarende måte er en funksjon $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bare en regel som til hvert element $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$ tilordner et element $\mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ i $\mathbb{R}^m$. Ofte vil disse reglene være beskrevet av formler — vi kan for eksempel ha en funksjon $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

vektorvalnert funksjon av flere variable

$$\mathbf{F}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2y + z \\ y\sin(x^2 - z) \end{pmatrix}$$

En funksjon fra $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^m$ kalles også en *avbildning*. De to ordene betyr akkurat det samme og brukes om hverandre, men det er ofte slik at man sier "avbildning" når man tenker på noe geometrisk, og "funksjon" når man tenker mer regneteknisk.

avbildning = ? kontinuerlig funksjon

Denne seksjonen handler om lineæravbildninger. La oss begynne med definisjonen:

Definisjon 1.9.1 *En funksjon* $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *kalles en* lineæravbildning *dersom vi for alle* $c \in \mathbb{R}$ *og alle* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *har:*
(i) $\mathbf{T}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{T}(\mathbf{x})$
(ii) $\mathbf{T}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{T}(\mathbf{y})$

T for lineær- transformasjon

De aller fleste funksjoner fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ er *ikke* lineæravbildninger, men disse funksjonene er allikevel så viktige at det er en hel gren av matematikken som hovedsakelig handler om dem — denne grenen kalles *lineær algebra*.

La oss begynne med en enkel og nyttig generalisering av definisjonen.

egenskapene i 1

Setning 1.9.2 *Anta at* $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *er en lineæravbildning. Da er*

$$\mathbf{T}(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k) = c_1\mathbf{T}(\mathbf{x}_1) + c_2\mathbf{T}(\mathbf{x}_2) + \cdots + c_k\mathbf{T}(\mathbf{x}_k)$$

for alle tall $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ *og alle vektorer* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$.

Bevis: Vi spalter av ett og ett ledd. Siden vi kan oppfatte $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k$ som en sum av to ledd $c_1\mathbf{x}_1$ og $c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k$, har vi

$$\mathbf{T}(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k) = \mathbf{T}(c_1\mathbf{x}_1) + \mathbf{T}(c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k) =$$

$$= c_1\mathbf{T}(\mathbf{x}_1) + \mathbf{T}(c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k)$$

der vi har brukt de to punktene i definisjonen av lineæravbildning. Vi kan nå spalte av leddet $c_2\mathbf{x}_2$ på akkurat sammme måte, og fortsetter vi slik, står vi til slutt igjen med

$$\mathbf{T}(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k) = c_1\mathbf{T}(\mathbf{x}_1) + c_2\mathbf{T}(\mathbf{x}_2) + \cdots + c_k\mathbf{T}(\mathbf{x}_k)$$

□

Det neste resultatet viser oss at lineæravbildninger finnes:

Setning 1.9.3 *Anta at A er en $m \times n$-matrise. Da er funksjonen $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definert ved*

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

en lineæravbildning.

Bevis: Etter regnereglene for matrisemultiplikasjon er $\mathbf{T}(c\mathbf{x}) = A(c\mathbf{x}) = c(A\mathbf{x}) = c\mathbf{T}(\mathbf{x})$ og $\mathbf{T}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{T}(\mathbf{y})$. □

Eksempel 1: Hvis A er 2×3-matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix},$$

får vi en lineæravbildning $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ved

$$\mathbf{T}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + 3z \\ x - 4y + 2z \end{pmatrix}$$

♣

Den neste setningen er nok mer overraskende — den sier at det ikke finnes andre lineæravbildninger enn de som er gitt av matriser!

Setning 1.9.4 *Anta at $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en lineæravbildning. Da finnes det en $m \times n$-matrise A slik at* (og bare én)

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \quad \textit{for alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Matrisen A er gitt ved at den j-te søylen er lik $\mathbf{T}(\mathbf{e}_j)$ der $\mathbf{e}_j$ er den j-te enhetsvektoren

$$\mathbf{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \longleftarrow \textit{j-te komponent}$$

Vi kaller A matrisen til lineæravbildningen $\mathbf{T}$.

Bevis: Vi begynner med å sette navn på komponentene til $\mathbf{T}(\mathbf{e}_j)$ (som du vil se, er navnvalget inspirert av resultatet vi skal frem til!): -e-

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Siden enhver vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ kan uttrykkes ved hjelp av enhetsvektorene på denne måten

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n,$$

har vi ifølge setningen ovenfor

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1\mathbf{T}(\mathbf{e}_1) + x_2\mathbf{T}(\mathbf{e}_2) + \cdots + x_n\mathbf{T}(\mathbf{e}_n) =$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = A\mathbf{x}$$

der

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A e_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = T(e_j)$$

Dermed er setningen bevist. □

Vi skal nå se hvordan vi kan bruke resultatet ovenfor på refleksjoner og rotasjoner i planet. Dette er viktige eksempler i geometri.

Eksempel 2: Vi ser på avbildningen $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som avbilder enhver vektor på sitt speilbilde om x-aksen. Det er lett å overbevise seg om at T er en lineæravbildning, og vi skal bruke setningen ovenfor til å finne den tilhørende matrisen. Siden speilingen er om x-aksen, har vi

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{T}(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ifølge setningen ovenfor får vi matrisen til T ved å bruke disse vektorene som søylevektorer:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hvis $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, er dermed

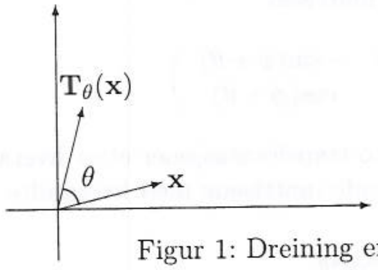
$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

♣

I eksemplet ovenfor er avbildningen så enkel at det ikke ville by på noe problem å skrive opp formelen for $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ direkte uten å gå veien om $\mathbf{T}(\mathbf{e}_1)$ og $\mathbf{T}(\mathbf{e}_2)$. I litt mer kompliserte eksempler blir imidlertid regningene atskillig mer oversiktlige om vi går veien om $\mathbf{T}(\mathbf{e}_1)$ og $\mathbf{T}(\mathbf{e}_2)$.

Eksempel 3: Avbildningen $\mathbf{T}_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er gitt ved at den dreier enhver vektor $\mathbf{x}$ en vinkel θ i positiv omløpsretning (se figur 1).

(θ = theta)



Figur 1: Dreining en vinkel θ

Det er ikke vanskelig å overbevise seg om at $\mathbf{T}_\theta$ er en lineæravbildning (f.eks. sier regelen $\mathbf{T}_\theta(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{T}_\theta(\mathbf{x}) + \mathbf{T}_\theta(\mathbf{y})$ i dette tilfellet at dersom vi først legger sammen to vektorer $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$, og så dreier resultatet en vinkel θ, så får vi det samme som om vi først dreier begge vektorene en vinkel θ, og så legger sammen de nye vektorene). For å finne matrisen til $\mathbf{T}_\theta$ må vi beregne $\mathbf{T}_\theta(\mathbf{e}_1)$ og $\mathbf{T}_\theta(\mathbf{e}_2)$. Dreier vi enhetsvektoren $\mathbf{e}_1$ en vinkel θ, ender den i punktet $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ (dette er bare definisjonen av cosinus og sinus til generelle vinkler). Dette betyr altså at

$$\mathbf{T}_\theta(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

Siden $\mathbf{e}_2$ ligger en vinkel $\pi/2$ foran $\mathbf{e}_1$ når vi dreier i positiv retning, får vi

XX
XX

$$\mathbf{T}_\theta(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Matrisen til lineæravbildningen $\mathbf{T}_\theta$ er altså

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Dersom vi dreier en vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en vinkel θ i positiv retning, får vi dermed en ny vektor

$$\mathbf{x}' = A_\theta \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}$$

Vi har nå løst den opprinnelige oppgaven vår som var å finne matrisen til lineæravbildningen $\mathbf{T}_\theta$. La oss gå litt videre for å se hva som skjer når vi kombinerer to rotasjoner. Dersom vi dreier en annen vinkel ϕ, får vi selvfølgelig matrisen

(ϕ = phi)

$$A_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

La oss nå anta at vi først dreier en vinkel θ og deretter en vinkel ϕ. I alt har vi da dreiet en vinkel $\phi + \theta$, tilsvarende matrisen

$$A_{\phi+\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\phi+\theta) & -\sin(\phi+\theta) \\ \sin(\phi+\theta) & \cos(\phi+\theta) \end{pmatrix}$$

På den annen side vet vi at når vi gjør to transformasjoner etter hverandre, svarer dette til å multiplisere de tilhørende matrisene med hverandre. Med andre ord må

$$A_{\phi+\theta} = A_\phi A_\theta$$

Skriver vi ut komponentene, ser vi at

(Repetisjon)

$$A_{\phi+\theta} = \begin{pmatrix} \cos(\phi+\theta) & -\sin(\phi+\theta) \\ \sin(\phi+\theta) & \cos(\phi+\theta) \end{pmatrix}$$

~~og~~

$$A_\phi A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta & -\sin\phi\cos\theta - \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta & \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta \end{pmatrix}$$

Sammenligner du komponentene i de to uttrykkene, vil du gjenkjenne formlene for sinus og cosinus til en sum. Vi har altså brukt matriser til å gi et nytt bevis for disse formlene. ♣

Egenverdier

Det er ofte et omstendelig arbeid å regne ut $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ for en lineæravbildning $\mathbf{T}$ og en vektor $\mathbf{x}$. For noen vektorer går det imidlertid raskt — alt vi behøver å gjøre, er å gange vektoren med et tall λ. Slike vektorer kalles *egenvektorer*. Egenvektorer kan bare finnes når $\mathbf{T}$ avbilder et rom inn i seg selv, altså når den går fra et rom $\mathbb{R}^n$ til det *samme* rommet $\mathbb{R}^n$. Her er den formelle definisjonen:

Spesielle vektorer kan det imidlertid gå raskt

Henri's d'/ eksempel 2!

e_1, e_2 egenv.

Definisjon 1.9.5 *Anta at* $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *er en lineæravbildning. Vi kaller* $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ *en* egenvektor *for* $\mathbf{T}$ *dersom det finnes et tall* λ *slik at*

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$$

Tallet λ *kaller vi* egenverdien *til* $\mathbf{x}$.

Bemerkning: I definisjonen ovenfor har vi knyttet egenvektorer til lineæravbildninger, men vi kunne like godt ha knyttet dem til matriser. Vektoren $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ er en egenvektor for matrisen A dersom det finnes et tall λ slik at $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

Eksempel 4: La oss undersøke om $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for lineæravbildningen $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ der $A = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Vi har

$$\mathbf{T}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix} = 5\mathbf{a}$$

så $\mathbf{a}$ er en egenvektor med egenverdi 5.

Gjør vi tilsvarende beregninger for $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, får vi

$$\mathbf{T}(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} = (-3)\mathbf{b}$$

Altså er $\mathbf{b}$ en egenvektor med egenverdi -3.

Et ikke-eksempel?

$c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$T(c) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

er ikke lik λc

for noen $\lambda \in \mathbb{R}$

Anta nå at en tredje vektor $\mathbf{c}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av egenvektorene $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$, dvs. at det finnes tall x og y slik at $\mathbf{c} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$ (det viser seg faktisk at alle vektorer i $\mathbb{R}^2$ kan skrives på denne måten). Da er

$$\mathbf{T}(\mathbf{c}) = \mathbf{T}(x\mathbf{a} + y\mathbf{b}) = x\mathbf{T}(\mathbf{a}) + y\mathbf{T}(\mathbf{b}) = 5x\mathbf{a} - 3y\mathbf{b}$$

Det viser seg altså at ikke bare egenvektorene selv, men også deres lineærkombinasjoner kan behandles på en enkel måte. ♣

Observasjonen i slutten av eksemplet ovenfor er viktig. Det viser seg at for "de fleste" lineæravbildninger $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ finnes det egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ slik at *enhver* vektor $\mathbf{v}$ kan skrives som en lineærkombinasjon

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$$

til $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n$

Hvis egenverdiene er henholdsvis $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, får vi da

$$\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{T}(x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n) =$$

$$= x_1\mathbf{T}(\mathbf{v}_1) + x_2\mathbf{T}(\mathbf{v}_2) + \cdots + x_n\mathbf{T}(\mathbf{v}_n) =$$
$$= x_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + x_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\lambda_n\mathbf{v}_n$$

Bruker vi $\mathbf{T}$ på begge side av dette uttrykket, får vi på tilsvarende måte

$$\mathbf{T}^2(\mathbf{v}) = \mathbf{T}(\mathbf{T}(\mathbf{x})) = x_1\lambda_1^2\mathbf{v}_1 + x_2\lambda_2^2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\lambda_n^2\mathbf{v}_n$$

Fortsetter vi på denne måten, får vi generelt

$$\mathbf{T}^k(\mathbf{v}) = x_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + x_2\lambda_2^k\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\lambda_n^k\mathbf{v}_n$$

Denne formelen forteller oss at dersom vi kjenner egenvektorene og egenverdiene til en lineæravbildning $\mathbf{T}$, så har vi god oversikt både over $\mathbf{T}$ selv og over alle dens potenser. I mange anvendelser forteller $\mathbf{T}^k(\mathbf{x})$ hvordan et system utvikler seg når vi starter i en tilstand $\mathbf{x}$ og lar tiden gå ($\mathbf{T}^1(\mathbf{x})$ er tilstanden etter ett tidsintervall, $\mathbf{T}^2(\mathbf{x})$ tilstanden etter to tidsintervaller osv.) Formelen ovenfor forteller oss da at veksten til systemet hovedsakelig er bestemt av den største egenverdien (eller, for å være helt presis, den egenverdien som har størst tallverdi).

Vi skal vente til kapittel 4 med å forklare hvordan man kan finne egenverdier i praksis. Det er likevel viktig å vite litt om begrepet og dets anvendelser allerede nå, siden det vil gjøre det lettere å forstå hensikten med mye av teorien som kommer senere.

Bemerkning: Ser du nøyere på definisjon 1.9.5, vil du se at den er litt upresis når det gjelder hva slags tall egenverdien λ skal være og hva slags vektor egenvektoren $\mathbf{x}$ skal være. Det viser seg at det finnes reelle matriser som har komplekse egenverdier og egenvektorer. Om man vil "regne med" disse avhenger av problemstillingen man ser på — i noen tilfeller er det nyttig å ha dem med, i andre tilfeller må man ekskludere dem. Situasjonen minner om den vi har for ligninger av n-te grad; noen ganger er det nyttig å ha med de komplekse løsningene og andre ganger ikke.

Eksempel 5: Dersom θ ikke er multiplum av π, viser det seg at rotasjonsmatrisene

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ikke har reelle egenvektorer og egenverdier (kan du forklare dette geometrisk?) De har imidlertid de komplekse egenvektorene

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

med tilhørende egenverdier $\lambda_1 = \cos\theta + i\sin\theta$ og $\lambda_2 = \cos\theta - i\sin\theta$. La oss sjekke dette for λ_1 og $\mathbf{v}_1$:

$$A_\theta \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta + i\sin\theta \\ \sin\theta - i\cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \lambda_1 \mathbf{v}_1$$

Du kan på tilsvarende måte sjekke at $A_\theta \mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_2$. ♣

Oppgaver til seksjon 1.9

X **1.** Finn matrisen til lineæravbildningen $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$\mathbf{T}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - y + z \\ -x + y - 3z \end{pmatrix}$$

X **2.** En lineæravbildning $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tilfredsstiller

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad T(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Finn matrisen til $\mathbf{T}$.

V **3.** La $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$. Lineæravbildningen $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tilfredsstiller $\mathbf{T}(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{T}(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Finn $\mathbf{T}(3\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$.

4. Lineæravbildningen $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avbilder ethvert punkt på sitt speilbilde om y-aksen. Finn matrisen til $\mathbf{T}$.

5. Lineæravbildningen $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ fordobler alle annenkomponenter, men endrer ikke førstekomponenter. Finn matrisen til $\mathbf{T}$.

6. Lineæravbildningen $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gjør alle vektorer dobbelt så lange og dreier dem en vinkel θ i positiv retning. Finn matrisen til $\mathbf{T}$.

7. Lineæravbildningen $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ avbilder alle vektorer på sin projeksjon ned i xy-planet. Finn matrisen til $\mathbf{T}$.

8. Lineæravbildningen $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ speiler alle vektorer om x-aksen og dreier dem deretter en vinkel θ i positiv retning. Finn matrisen til $\mathbf{T}$ (det kan være lurt å tenke på $\mathbf{T}$ som sammensetningen av to enklere avbildninger).

9. La A_θ være rotasjonsmatrisen i eksempel 3. Forklar at $A_{-\theta}$ er den inverse matrisen til A_θ uten å regne. Kontroller ved å regne ut $A_\theta A_{-\theta}$.

10. $\mathcal{L}$ er linjen gjennom origo som fremkommer når vi dreier x-aksen en vinkel θ i positiv retning. Lineæravbildningen $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ speiler alle punkter om linjen $\mathcal{L}$. La A_ϕ være matrisen til avbildningen som dreier alle vektorer en vinkel ϕ i positiv retning, og la B være matrisen til avbildningen som speiler alle punkter om x-aksen. Forklar at matrisen C til $\mathbf{T}$ er gitt ved

$$C = A_\theta B A_{-\theta}$$

og bruk denne formelen til å finne C.

11. La $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Finn tall x, y, z, u slik at $\mathbf{e}_1 = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$ og $\mathbf{e}_2 = z\mathbf{a} + u\mathbf{b}$.

b) Lineæravbildningen $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tilfredsstiller $T(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $T(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Finn $T(\mathbf{e}_1)$ og $T(\mathbf{e}_2)$.

c) Finn matrisen til $\mathbf{T}$.

12. a) Finn tall x, y slik at $\mathbf{e}_1 = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$ der $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ er som i eksempel 4. Finn $\mathbf{T}^4(\mathbf{e}_1)$ der $\mathbf{T}$ er lineæravbildningen i eksemplet.

b) Finn tall u, v slik at $\mathbf{e}_2 = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$. Finn $\mathbf{T}^4(\mathbf{e}_2)$. Hva er matrisen til $\mathbf{T}^4$?

13. Fullfør eksempel 5 ved å sjekke at $\mathbf{v}_2$ er en egenvektor med egenverdi λ_2.

14. La $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Vis at $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for A med egenverdi $\lambda_1 = 3$.

b) Vis at $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor for A med egenverdi $\lambda_1 = -1$.

c) La $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. Finn tall x, y slik at $\mathbf{a} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2$. Regn ut $A^{10}\mathbf{a}$.

15. Anta at $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tilfredsstiller

$$\mathbf{F}(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = c\mathbf{F}(\mathbf{x}) + d\mathbf{F}(\mathbf{y})$$

for alle $c, d \in \mathbb{R}$ og alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Vis at $\mathbf{F}$ er en lineæravbildning.

16. Anta at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ ($\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}$) ikke er parallelle, og la $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ være to vektorer i $\mathbb{R}^2$. Vis at de finnes nøyaktig én lineæravbildning $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ slik at $\mathbf{T}(\mathbf{a}_1) = \mathbf{b}_1$ og $\mathbf{T}(\mathbf{a}_2) = \mathbf{b}_2$. det

1.10 Affinavbildninger

Som vi så i eksemplene i forrige seksjon, er lineæravbildninger ofte nyttige når vi skal beskrive geometriske transformasjoner som refleksjoner og rotasjoner. De har imidlertid en svakhet; siden en lineæravbildning alltid tilfredsstiller $\mathbf{T}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, kan ikke lineæravbildninger brukes til å forskyve figurer i planet. Vi skal nå utvide klassen av avbildninger slik at vi også kan behandle forskyvninger (eller *translasjoner* som matematikere liker å kalle dem). : Siden

Definisjon 1.10.1 *En funksjon* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *kalles en* affinavbildning *dersom det finnes en* $m \times n$*-matrise* A *og en vektor* $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^m$ *slik at*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{c} \quad \textit{for alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Vi kaller A matrisen *til* $\mathbf{F}$ *og* $\mathbf{c}$ konstantleddet *til* $\mathbf{F}$.

Vi ser at lineæravbildninger rett og slett er affinavbildninger med konstantledd $\mathbf{c}$ lik $\mathbf{0}$. Vi ser også at translasjonen $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{c}$ som forskyver alle vektorer en distanse $\mathbf{c}$, er en affinavbildning, siden den kan skrives + retning!

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = I_n\mathbf{x} + \mathbf{c}$$

(husk at I_n er $n \times n$-identitetsmatrisen og at $I_n\mathbf{x} = \mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$).

Bemerkning: En affinavbildning $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er simpelthen en funksjon av typen $f(x) = ax + b$, altså det vi vanligvis kaller en *lineær* funksjon. Grafen til en slik f er en rett linje. Det viser seg at en funksjon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er en affinavbildning hvis og bare hvis grafen er et plan. Av og til er det nyttig å tenke på (grafen til) affinavbildninger som generaliseringer av linjer og plan til høyere dimensjoner.

En viktig egenskap ved affinavbildninger er at de avbilder rette linjer på rette linjer. La oss være helt sikre på at vi skjønner hva dette betyr. Anta at $\mathcal{L}$ er den rette linjen i $\mathbb{R}^n$ som går gjennom punktet $\mathbf{a}$ og har retningsvektor $\mathbf{b}$ (det betyr at $\mathcal{L}$ er samlingen av alle punkter på formen $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ slik vi så i seksjon 1.2). Dersom $\mathbf{F}$ er en kontinuerlig funksjon fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$, kan vi bruke $\mathbf{F}$ på alle punktene som ligger på linjen $\mathcal{L}$. Vi får da en samling av punkter i $\mathbb{R}^m$ som vi kaller *bildet av* $\mathcal{L}$ *under* $\mathbf{F}$. Vanligvis vil dette bildet være en kurve i $\mathbb{R}^m$. Når $\mathbf{F}$ er en affinavbildning, er denne kurven en rett linje.

$\vec{F}(\vec{a}+t\vec{b})$

Setning 1.10.2 *Anta at* $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}+\mathbf{c}$ *er en affinavbildning fra* $\mathbb{R}^n$ *til* $\mathbb{R}^m$, *og la* $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ *være parameterfremstillingen til en linje* $\mathcal{L}$ *i* $\mathbb{R}^n$. *Dersom* $A\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, *vil bildet av* $\mathcal{L}$ *under* $\mathbf{F}$ *være linjen i* $\mathbb{R}^m$ *som går gjennom punktet* $\mathbf{F}(\mathbf{a})$ *og har retningsvektor* $A\mathbf{b}$.

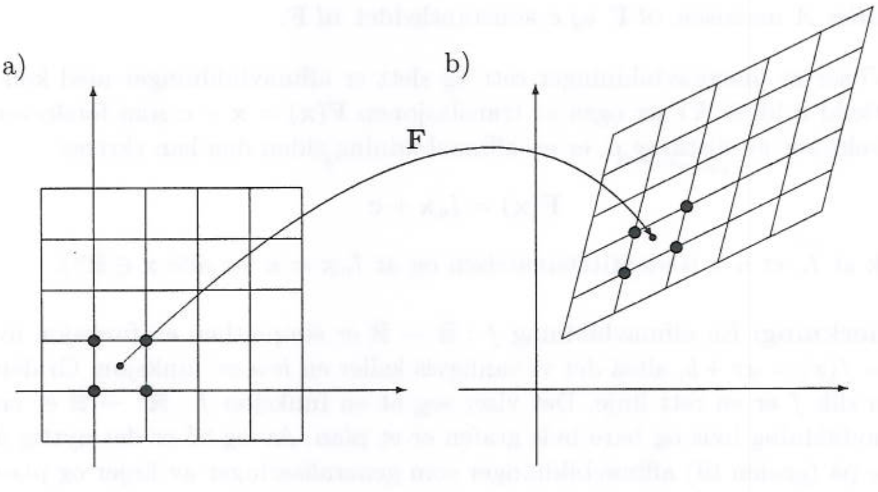
Bevis: Vi ser at

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = A(\mathbf{a} + t\mathbf{b}) + \mathbf{c} = A\mathbf{a} + \mathbf{c} + t(A\mathbf{b}) = \mathbf{F}(\mathbf{a}) + t(A\mathbf{b})$$

)(den rette linjen) som

som er parameterfremstillingen til en rett linje som går gjennom punktet $F(\mathbf{a})$ og har retningsvektor $A\mathbf{b}$. □

Bemerkning. Dersom $A\mathbf{b} = \mathbf{0}$, ser vi at bildet av $\mathcal{L}$ degenererer til ett eneste punkt. Legg også merke til at dersom vi bruker $\mathbf{F}$ på to parallelle linjer (dvs. to linjer med samme retningsvektor $\mathbf{b}$), så blir også de resulterende linjene parallelle (fordi de får samme retningsvektor $A\mathbf{b}$).



Figur 1: En affinavbildning $\mathbf{F}$ anvendt på et rutenett

Determinanten som forstørrelsesfaktor

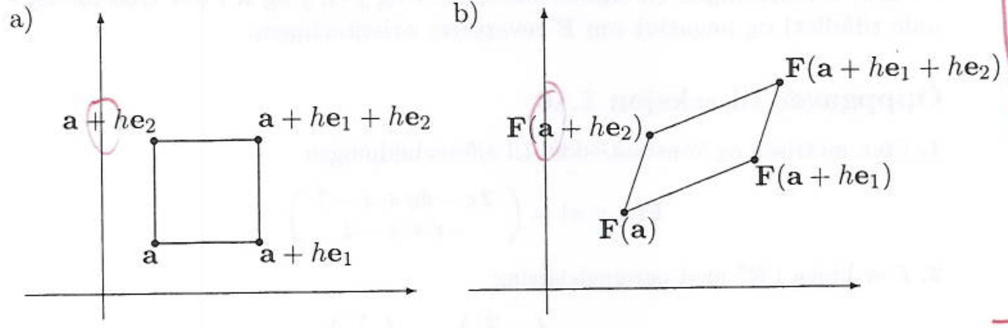
Som vi akkurat har sett, er bildet av en rett linje under en affinavbildning selv en rett linje. Vi vet også at affinavbildninger avbilder parallelle linjer på parallelle linjer. Figur 1 illustrerer dette for en affinavbildning $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; rutenettet i punkt a) avbildes på det forskjøvede og fordreide rutenettet i punkt b). Kvadratet med markerte hjørner i a) avbildes på parallellogrammet med markerte hjørner i b).

Et spørsmål som ofte dukker opp, er hvor mye avbildningen F forstørrer eller forminsker arealet: Hvor stort er arealet til parallellogrammet vi ender opp med, sammenlignet med arealet til kvadratet vi startet med? Figur 2 viser et kvadrat før og etter vi har brukt $\mathbf{F}$ på det. Arealet til kvadratet i punkt a) er h^2. Parallellogrammet i b) er utspent av vektorene $\mathbf{F}(\mathbf{a}+h\mathbf{e}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{a})$ og $\mathbf{F}(\mathbf{a}+h\mathbf{e}_2) - \mathbf{F}(\mathbf{a})$. La oss se nærmere på disse størrelsene.

Siden $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er en affinavbildning, er den på formen

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{c}$$

der $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ er en 2×2-matrise og $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ er en vektor i $\mathbb{R}^2$ (siden det er matrisemultiplikasjon involvert, må vi skrive vektorene som søylevektorer). Vi ser nå at



Figur 2: Bildet av et kvadrat under $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F}(\mathbf{a}+h\mathbf{e}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{a}) = (A(\mathbf{a}+h\mathbf{e}_1)+\mathbf{c}) - (A\mathbf{a}+\mathbf{c}) = hA\mathbf{e}_1 = h\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{a}+h\mathbf{e}_2) - \mathbf{F}(\mathbf{a}) = (A(\mathbf{a}+h\mathbf{e}_2)+\mathbf{c}) - (A\mathbf{a}+\mathbf{c}) = hA\mathbf{e}_2 = h\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

Parallellogrammet er derfor utspent av vektorene (ha_{11}, ha_{21}) og (ha_{12}, ha_{22}), og har — ifølge setning 1.8.1 — areal

$$\underbrace{\left|\begin{pmatrix} ha_{11} & ha_{21} \\ ha_{12} & ha_{22} \end{pmatrix}\right|} = |h^2 a_{11}a_{22} - h^2 a_{12}a_{21}| = h^2|\det(A)|$$

$$\left|\begin{vmatrix} ha_{11} & ha_{21} \\ ha_{12} & ha_{22} \end{vmatrix}\right|$$

arealskalering?

Vi ser altså at arealet har endret seg med en faktor $|\det(A)|$; tallverdien til determinanten er *forstørrelsesfaktoren* til affinavbildningen F.

Vi kan gjennomføre akkurat det samme resonnementet i det tredimensjonale tilfellet ved å dele rommet opp i små terninger med sider parallelle med aksene. En affinavbildning $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{c}$ vil avbilde disse terningene på parallellepipeder, og volumet til parallellepipedene vil være $|\det(A)|$ ganger volumet til terningene. La oss oppsummere resultatene.

—"—

Setning 1.10.3 *Dersom* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *er en affinavbildning med matrise* A, *så forstørrer* $\mathbf{F}$ *arealer med en faktor* $|\det(A)|$. *Dersom* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *er en affinavbildning med matrise* A, *så forstørrer* $\mathbf{F}$ *volumer med en faktor* $|\det(A)|$. □

multipliserer ×2

Bemerkning: Det kan se ut som vi tar i litt vel kraftig i setningen ovenfor — strengt tatt har vi vel bare vist at $|\det(A)|$ er forstørrelsesfaktoren for arealet til kvadrater, og ikke for mer generelle arealer? Det viser seg imidlertid at alle andre mengder vi kan definere arealet til, kan tilnærmes med kvadrater, og resultatet gjelder derfor generelt. Tilsvarende gjelder for terninger i det tredimensjonale tilfellet. Vi skal komme grundigere tilbake til disse spørsmålene i kapittel 6.

Det er naturlig å spørre om fortegnet til determinanten har en geometrisk tolkning også for avbildninger. Det har det: Fortegnet er positivt dersom $\mathbf{F}$ bevarer orienteringen til enhetsvektorene $\mathbf{i}$ og $\mathbf{j}$ ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$ i det tredimensjonale tilfellet) og negativt om $\mathbf{F}$ reverserer orienteringen.

Opppgaver til seksjon 1.10

× **1.** Finn matrisen og konstantleddet til affinavbildningen

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x - 3y + z - 7 \\ -x + z - 2 \end{pmatrix}$$

× **2.** $\mathcal{L}$ er linjen i $\mathbb{R}^3$ med parametrisering

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

og $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ er affinavbildningen

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Finn en parametrisering av bildet av $\mathcal{L}$ under $\mathbf{F}$.

× **3.** En affinavbildning $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tilfredsstiller $\mathbf{F}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{F}(1,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{F}(0,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Finn matrisen og konstantleddet til $\mathbf{F}$.

4. Affinavbildningen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dreier enhver vektor en vinkel $\frac{\pi}{4}$ i positiv retning, og flytter den deretter en distanse $(3, -1)$. Finn matrisen og konstantleddet til $\mathbf{F}$.

5. a) Affinavbildningen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avbilder ethvert punkt på sitt speilbilde om den vertikale linjen $x = 3$. Finn matrisen og konstantleddet til $\mathbf{F}$.

b) Affinavbildningen $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avbilder ethvert punkt på sitt speilbilde om den horisontale linjen $y = -2$. Finn matrisen og konstantleddet til $\mathbf{G}$.

6. Affinavbildningen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avbilder ethvert punkt på sitt speilbilde om linjen $y = x + 1$. Finn matrisen og konstantleddet til $\mathbf{F}$.

7. Anta at punktene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \in \mathbb{R}^2$ ikke ligger på samme rette linje, og la $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ være tre punkter i $\mathbb{R}^2$. Vis at det finnes nøyaktig én affinavbildning $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ slik at $\mathbf{F}(\mathbf{a}_1) = \mathbf{b}_1$, $\mathbf{F}(\mathbf{a}_2) = \mathbf{b}_2$ og $\mathbf{F}(\mathbf{a}_3) = \mathbf{b}_3$.

8. Vis at en funksjon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er en affinavbildning hvis og bare hvis grafen til f er et plan.