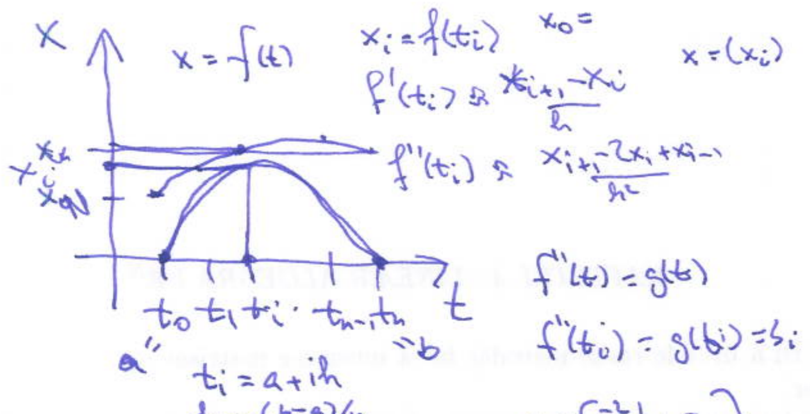
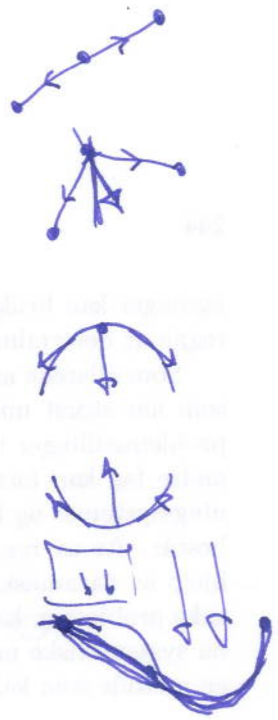




Kapittel 4

Lineær algebra i $\mathbb{R}^n$

I dette kapitlet skal vi se nærmere på en del spørsmål om vektorer og matriser som vi så vidt har vært borti tidligere, men som vi hittil ikke har gitt noen skikkelig svar på — spørsmål som: når er en matrise inverterbar og hvordan regner vi ut den inverse matrisen, hva er determinanter og hvordan regner vi dem ut på en effektiv måte, hvordan finner vi egenverdier og egenvektorer og hva kan de brukes til? Disse spørsmålene er viktige dels fordi mange praktiske problemer kan formuleres ved hjelp av vektorer og matriser, og dels fordi mange problemer i andre deler av matematikken kan løses ved hjelp av matrisemetoder. Vi skal se eksempler på begge disse fenomenene i dette og de neste kapitlene.

Den videregående teorien for vektorer og matriser (og deres generaliseringer) kalles *lineær algebra* og blir etter hvert ganske abstrakt, men den har et ytterst konkret utgangspunkt, nemlig de lineære ligningssystemene du lærte å løse på ungdomsskolen, slike som

$$2x - y = 3$$
$$x + 3y = 4$$

Senere har du truffet slike ligningssystemer i mange sammenhenger, ofte med flere ligninger og flere ukjente. Et typisk eksempel er delbrøkoppspalting der vi bruker lineære ligningssystemer til å finne konstantene i oppspaltingen.

Det viser seg at nøkkelen til alle de spørsmålene vi startet med ligger i et nærmere studium av slike lineære ligningssystemer (dvs. ligningssystemer der de ukjente bare opptrer i første potens og ikke inni mer kompliserte funksjoner). Kanskje kan et slikt studium virke unødvendig siden vi vet hvordan vi skal løse disse ligningssystemene i praksis, men det viser seg at det er mye å tjene på å gå systematisk til verks og studere litt mer teoretiske spørsmål som: når har et lineært ligningssystem løsninger, og hvor mange løsninger har det i så fall? Etter hvert som kapitlet skrider frem, vil du se hvordan kunnskap om lineære ligningssystemer kaster lys over spørsmålene vi startet med. Du vil også se hvordan systematiske løsningsmetoder for lineære ligninger kan brukes til å utvikle raske metoder for å invertere matriser og regne ut determinanter.

Som allerede antydet er lineær algebra en av de delene av matematikken som har størst umiddelbar nytte — det viser seg at svært mange sentrale problemstillinger i matematikk, fysikk, informatikk, statistikk, økonomi og andre fag kan formuleres (i hvert fall tilnærmet) ved hjelp av lineære ligningssystemer og løses ved hjelp av lineær algebra. Disse ligningssystemene består ofte av mange tusen ligninger og ukjente, og de kan bare løses ved hjelp av datamaskiner. Når man skal programmere en datamaskin til å løse slike problemer, kan man ikke stole på snarveier og smarte triks — man må ha systematiske metoder som alltid fungerer. Vi skal begynne med å se på en metode som kalles *Gauss-eliminasjon* eller *Gauss-Jordan-eliminasjon*.

4.1 Noen eksempler på Gauss-eliminasjon

La oss introdusere metoden gjennom et enkelt eksempel. Vi skal løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2y + z &= -1 \\ 3x + 5y + z &= 2 \\ x + 2y + z &= 1 \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

ved å omforme det til stadig enklere ligningssystemer som har nøyaktig de samme løsningene (som vi skal se senere, kan et lineært ligningssystem ha én, ingen eller uendelig mange løsninger). Til slutt sitter vi igjen med et ligningssystem som er så enkelt at vi kan løse det med hoderegning. Ideen bak metoden er å *eliminere* (fjerne) ukjente fra så mange ligninger som mulig — først eliminerer vi den første variablen x fra alle ligninger unntatt den øverste, deretter eliminerer vi den andre variablen y fra alle ligninger unntatt de to øverste osv. Det ligningssystemet vi sitter igjen med til slutt, kan løses nedenfra — først finner vi verdien til den siste variablen fra den nederste ligningen, deretter bruker vi denne verdien til å finne verdien til variablen foran osv. Dette kan høres komplisert ut, men når vi bruker metoden på ligningssystemet ovenfor, vil du fort se hvordan den virker.

Siden vi skal eliminere x fra alle ligningene unntatt den øverste, passer det dårlig at den øverste ligningen mangler x-ledd. Vi begynner derfor med å bytte om den første og siste ligningen:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ 3x + 5y + z &= 2 \\ 2y + z &= -1 \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Det nye ligningssystemet har selvfølgelig akkurat de samme løsningene som det gamle; rekkefølgen av ligningene spiller ingen rolle. Neste skritt i metoden er å bruke x-leddet i den øverste ligningen til å eliminere x-leddet i de andre. Ganger vi den første ligningen med -3, får vi $-3x - 6y - 3z = -3$, og legger vi denne ligningen til ligning nummer to i (4.1.2), får vi dette ligningssystemet:

-3

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ - y - 2z &= -1 \\ 2y + z &= -1 \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Dette ligningssystemet må ha nøyaktig de samme løsningene som det foregående (vær sikker på at du skjønner hvorfor!). Normalt ville vi nå fortsette med å eliminere x-en i den nederste linjen, men siden den allerede er borte, kan vi konsentrere oss om y-ene isteden. Vi skal bruke y-leddet i den nest øverste ligningen til å eliminere y-leddet i den nederste ligningen. Multipliserer vi den nest øverste ligningen med 2, får vi $-2y - 4z = -2$, og legger vi dette til den nederste ligningen, får vi

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ - y - 2z &= -1 \\ - 3z &= -3 \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Igjen ser vi at dette ligningssystemet har akkurat de samme løsningene som det foregående. Nå er vi nesten ferdige, men vi kan forenkle ligningene ytterligere ved å gange den midterste med -1 og den nederste med $-\frac{1}{3}$:

-1

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ y + 2z &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Dette ligningssystemet er enkelt å løse; fra den nederste ligningen ser vi at $z = 1$, setter vi dette inn i den midterste, får vi at $y = -1$, og setter vi disse verdiene for y og z inn i den øverste ligningen, ser vi at $x = 2$. Siden alle ligningssystemene våre har de samme løsningene, betyr dette at $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$ også er (den eneste) løsningen til det opprinnelige ligningssystemet (4.1.1).

Bemerkning: Det finnes raskere måter å løse ligningssystemet (4.1.1) på. Sammenligner vi den første og den siste ligningen, ser vi med en gang at $x = 2$, og deretter er det ikke vanskelig å finne y og z. Slike snarveier er viktige når vi løser ligningssystemer for hånd, men det er ikke det som er poenget for oss nå — vi er på jakt etter systematiske metoder som fungerer for *alle* lineære ligningssystemer.

Av åpenbare grunner sier vi at ligningssystemet (4.1.5) er på *trappeform*, og målet for metoden vi er iferd med å beskrive, er å føre et hvilket som helst lineært ligningssystem over på trappeform. Legg merke til at vi i prosessen ovenfor har brukt tre operasjonstyper:

(i) Bytte om to ligninger i ligningssystemet

$I_v = I_h$

(ii) Gange en ligning i systemet med et tall forskjellig fra 0

$k\,II_v = k\,II_h$

(iii) Velge én av ligningene i systemet og erstatte den med det vi får når vi legger til et multiplum av en av de *andre* ligningene

$I_v + k\,II_v = I_h + k\,II_h$

Det viser seg at alle lineære ligningssystemer kan føres over på trappeform ved å bruke disse tre operasjonene.

Sats

Når vi bruker operasjonene ovenfor, endrer vi ikke løsningene til ligningssystemet — vi mister ikke løsninger og pådrar oss heller ikke nye, "falske" løsninger. Det betyr at løsningene til det enkle trappeformede systemet vi ender opp med, er de samme som løsningene til det mer kompliserte systemet vi startet med. Det er lettere å forstå hvorfor dette er viktig dersom vi ser på et ligningssystem med uendelig mange løsninger.

Vi skal se på ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y + z - u &= 3 \\ -x - y - 4z + 2u &= -1 \\ 2x + 5y - z &= 9 \\ x + 7z - 5u &= -3 \end{aligned}$$

Vi bruker først x-leddet i den øverste ligningen til å kvitte oss med x-leddene i de andre ligningene. Legger vi den øverste linjen til den andre, får vi

$$\begin{aligned} x + 2y + z - u &= 3 \\ y - 3z + u &= 2 \\ 2x + 5y - z &= 9 \\ x + 7z - 5u &= -3 \end{aligned}$$

\$-2\$

For å bli kvitt x-leddet i ligning nummer tre, ganger vi først den øverste ligningen med -2 og får $-2x - 4y - 2z + 2u = -6$. Legger vi dette til den tredje ligningen, får vi

$$\begin{aligned} x + 2y + z - u &= 3 \\ y - 3z + u &= 2 \\ y - 3z + 2u &= 3 \\ x + 7z - 5u &= -3 \end{aligned}$$

For å kvitte oss med x-leddet i den nederste linjen, ganger vi den øverste linjen med -1 og får $-x-2y-z+u=-3$. Legger vi dette til den nederste linjen, får vi

$$\begin{aligned} x+2y+z-u &= 3 \\ y-3z+u &= 2 \\ y-3z+2u &= 3 \\ -2y+6z-4u &= -6 \end{aligned}$$

Nå har vi kvittet oss med alle de x-leddene vi ønsket å fjerne. Neste trinn på programmet er å bruke y-leddet i ligning nummer to til å eliminere y-leddet i alle ligningene nedenfor. Ganger vi linje nummer to med -1, får vi $-y+3z-u=-2$, og legger vi dette til linje nummer tre, får vi -1

$$\begin{aligned} x+2y+z-u &= 3 \\ y-3z+u &= 2 \\ u &= 1 \\ -2y+6z-4u &= -6 \end{aligned}$$

For å bli kvitt y-leddet i den nederste ligningen, ganger vi først ligning nummer to med 2 og får $2y-6z+2u=4$. Legger vi dette til den nederste linjen, får vi

$$\begin{aligned} x+2y+z-u &= 3 \\ y-3z+u &= 2 \\ u &= 1 \\ -2u &= -2 \end{aligned}$$

Ifølge systemet vårt skulle vi nå ha brukt z-leddet i den tredje ligningen til å kvitte oss med z-leddet i den fjerde, men det er ikke noe z-ledd i tredje ligning, og vi kan heller ikke skaffe oss noe ved å bytte om på ligning 3 og 4. Vi går derfor videre til den neste variabelen u, og bruker u-leddet i den tredje ligningen til å eliminere u-leddet i fjerde. Ganger vi ligning 3 med 2, får vi $2u=2$, og legger vi dette til ligning 4, får vi

$$\begin{aligned} x+2y+z-u &= 3 \\ y-3z+u &= 2 \\ u &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Vi har nå fått ligningssystemet over på trappeform, men trappen er litt mindre regelmessig enn i stad siden ikke alle trappetrinnene er like lange. Dette er helt greit, og ikke til å unngå i mange tilfeller. i sted ?
,

La oss nå prøve å løse ligningssystemet ovenfor. Den siste ligningen er alltid oppfylt og kan bare glemmes. Den nest nederste ligningen forteller oss at $u = 1$. Ligningen over gir oss ikke noe krav på z, men forteller oss at vi kan regne ut y når vi kjenner z. Dette betyr at vi kan velge z helt fritt, men når valget er gjort, må vi la $y = 2 + 3z - u = 1 + 3z$ (husk at $u = 1$). Den øverste ligningen lar oss på tilsvarende måte regne ut x når z er valgt — vi får $x = 3 - 2y - z + u = 3 - 2(1 + 3z) - z + 1 = 2 - 7z$. Dette betyr at ligningen har uendelig mange løsninger, nemlig

$$\begin{aligned} x &= 2 - 7z \\ y &= 1 + 3z \\ z &= z \\ u &= 1 \end{aligned}$$

der z er et fritt valgt tall. Det er instruktivt å sette disse uttrykkene inn i det opprinnelige ligningssystemet og se at de passer.

Når man arbeider med ligningssystemer med uendelig mange løsninger, er det lett å forstå fordelene ved bare å bruke operasjoner som ikke endrer løsningsmengden til ligningssystemet — i systemet ovenfor hadde det ikke vært enkelt å holde styr på hvilke falske løsninger vi hadde pådratt oss og hvilke ekte vi hadde mistet.

Vi tar med enda et eksempel som viser hva som skjer når ligningssystemet *ikke* har løsninger. Vi starter med ligningssystemet

$$\begin{aligned} x - y + z - u &= 1 \\ 2x - 2y - z + u &= 0 \\ -x + 2y + u &= 2 \\ 2x - y + u &= 2 \end{aligned}$$

og bruker på vanlig måte x-leddet i den første ligningen til å eliminere x-leddene i de andre ligningene. Ganger vi den øverste ligningen med -2 og legger resultatet til den nest øverste, får vi

-2

$$\begin{aligned} x - y + z - u &= 1 \\ -3z + 3u &= -2 \\ -x + 2y + u &= 2 \\ 2x - y + u &= 2 \end{aligned}$$

Legger vi den øverste linjen til den tredje, får vi

$$\begin{aligned} x - y + z - u &= 1 \\ -3z + 3u &= -2 \\ y + z \quad &= 3 \\ 2x - y \quad + u &= 2 \end{aligned}$$

-2

Til slutt ganger vi den øverste linjen med -2 og legger resultatet til den nederste:

$$\begin{aligned} x - y + z - u &= 1 \\ -3z + 3u &= -2 \\ y + z &= 3 \\ y - 2z + 3u &= 0 \end{aligned}$$

Neste post på programmet er vanligvis at vi bruker y-leddet i den andre ligningen til å kvitte oss med y-leddene nedenfor, men i dette tilfellet er det ikke noe y-ledd i den andre ligningen. Vi bytter derfor om på ligning 2 og 3:

$$\begin{aligned} x - y + z - u &= 1 \\ y + z &= 3 \\ -3z + 3u &= -2 \\ y - 2z + 3u &= 0 \end{aligned}$$

Ganger vi den andre linjen med -1 og legger resultatet til den nederste linjen, får vi

$$\begin{aligned} x - y + z - u &= 1 \\ y + z &= 3 \\ -3z + 3u &= -2 \\ -3z + 3u &= -3 \end{aligned}$$

Det gjenstår å bruke z-leddet i tredje linje til å eliminere z-leddet i den nederste linjen. Ganger vi den tredje linjen med -1 og legger resultatet til den nederste, får vi

$$\begin{aligned} x - y + z - u &= 1 \\ y + z &= 3 \\ -3z + 3u &= -2 \\ 0 &= -1 \end{aligned}$$

Dermed har vi fått ligningssystemet på trappeform. Siden den nederste linjen er umulig å oppfylle (ingen valg av x, y, z, u kan få 0 til å bli lik -1), har systemet ingen løsning. Det betyr at det opprinnelige systemet heller ikke har noen løsning.

Det viser seg at vi nå har sett alle de mulighetene som finnes — et lineært ligningssystem kan ha enten én, uendelig mange eller ingen løsninger. Dette kan virke underlig, men det er ikke vanskelig å få et geometrisk innblikk i det som foregår. La oss se på et ligningssystem med tre ligninger og tre ukjente:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

Hver av disse ligningene beskriver et plan — la oss kalle dem I, II og III. En løsning til ligningssystemet vil være (koordinatene til) et punkt som ligger i alle tre planene. "Normalt" vil plan I og II skjære hverandre langs en rett linje m (unntakene er hvis I og II er parallelle eller sammenfallende). Denne linjen m vil normalt skjære det tredje planet i ett eneste punkt, og koordinatene til dette punktet gir oss da den eneste løsningen til ligningssystemet. Det finnes imidlertid unntak; dersom skjæringslinjen m ligger i planet III, vil alle punktene på denne linjen gi oss en løsning — i dette tilfellet har vi altså uendelig mange løsninger. En tredje mulighet er at linjen m ikke skjærer planet III i det hele tatt — i så fall har ligningssystemet ingen løsning.

I den neste seksjonen skal vi se grundigere på metoden ovenfor, men før vi begynner, kan det være lurt å gjøre en enkel observasjon. I alle regningene våre har variablene x, y, z, u spilt en underordnet rolle — de har bare vært med som en slags "plassholdere" som har fortalt oss hvilke koeffisienter som hører sammen. Vi kan spare skrivearbeid og tjene oversikt ved å fjerne variablene og isteden organisere koeffisientene i en matrise. Vårt første ligningssystem

$$\begin{aligned} 2y + z &= -1 \\ 3x + 5y + z &= 2 \\ x + 2y + z &= 1 \end{aligned}$$

kan f.eks. erstattes med matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Legg merke til hvordan B er laget: Elementene i den første søylen er koeffisienten til x i ligningssystemet, elementene i den andre søylen er koeffisientene til y, elementene i den tredje søylen er koeffisientene til z, mens den fjerde søylen består av konstantene på høyresiden av ligningssystemet. Vi kaller *B den utvidede matrisen* til ligningssystemet (4.1.1) (*utvidet* fordi vi ikke bare har med koeffisientene, men også konstantene på høyresiden). Vi kan nå utføre akkurat de samme operasjonene på denne matrisen som vi i stad utførte på ligningssystemet. Vi får da denne sekvensen

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Når vi nå har fått matrisen på trappeform, kan vi gå tilbake til ligningssystemet ved å sette inn variablene igjen:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ y + 2z &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Siden matrisenotasjonen er mer oversiktlig enn ligningsnotasjonen, skal vi stort sett holde oss til den i fortsettelsen.

Bemerkning: Som vi allerede har nevnt, må man i praksis ofte løse store ligningssystemer med tusenvis av ligninger og ukjente. Dette må selvfølgelig gjøres med datamaskin, men selv for en datamaskin kan regneoppgavene bli uoverkommelige dersom vi ikke bruker effektive metoder. Et godt mål på effektiviteten til en metode er å telle hvor mange regneoperasjoner den krever. Når vi løser et ligningssystem ved hjelp av Gauss-eliminasjon, er det to trinn som krever utregninger — å gange en ligning/rad med et tall, og å subtrahere et multiplum av én ligning/rad fra en annen. Begge disse trinnene krever flere utregninger siden vi må behandle alle ikke-null koeffisienter i ligningen/raden. Teller vi opp alle de regneoperasjonen vi trenger for å løse et ligningssystem med n ligninger og n ukjente ved hjelp av Gauss-eliminasjon, får vi omtrent $\frac{n^3}{3}$. Er $n = 1000$, trenger vi altså omtrent $3.3 \cdot 10^8$ operasjoner! Det viser seg at det er mulig å senke dette tallet noe ved å benytte andre metoder, men disse metodene er ofte så tungvinne å bruke at de bare anvendes når man er helt på grensen av det maskinene kan greie.

I anvendt lineær algebra er effektivitetsberegninger av denne typen svært viktige, men vi har så mye annet å konsentrere oss om i denne boken at vi skal nøye oss med noen få råd her og der om hvordan man bør gå frem — eller helst: hvordan man *ikke* bør gå frem!

Oppgaver til seksjon 4.1

1. Finn alle løsningene til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 3 \\ 2x + 3y - 3z &= -1 \\ -x + 2y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

2. Finn alle løsningene til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 3 \\ 2x - 2y &= 4 \\ -3x + 2y + z &= 0 \end{aligned}$$

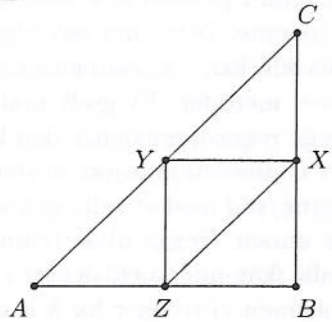
3. Finn alle løsningene til ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 6z &= -2 \\ -3x + 2y - z &= 8 \\ x - 6y + 11z &= 4 \end{aligned}$$

4. Finn alle løsningene til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 1 \\ -x + y - 2z &= 0 \\ -3x + 5y - 8z &= 2 \end{aligned}$$

5. Figuren viser et nettverk av ledninger. Temperaturen i hvert av punktene X, Y og Z er lik gjennomsnittet av temperaturen i nabopunktene (dvs. punktene som de er forbundet til ved hjelp av en ledning). Anta at temperaturen i hjørnepunktene A, B og C er henholdsvis a, b og c. Finn temperaturene x, y og z i punktene X, Y og Z.



6. I et game i tennis må du vinne med minst to poeng. Når man kommer til stillingen 40-40, vil spilleren som vinner den neste ballvekslingen få "fordel". Vinner hun også den neste ballvekslingen, vinner hun gamet, hvis ikke går stillingen tilbake til "like". Spilleren som vinner den neste ballvekslingen vil så få fordel, osv. I denne delen av spillet er det altså tre mulige stillinger: "like", "fordel spiller A" og "fordel spiller B". I tennis lønner det seg å serve, og vi antar at i det gamet vi ser på, er det spiller A som har serven og dermed har 60% sjanse for å vinne en ballveksling.

Vi lar x være spiller As sannsynlighet for å vinne gamet dersom stillingen er like, y hennes sannsynlighet for å vinne gamet dersom hun har fordel og z hennes sannsynlighet for å vinne gamet dersom motstanderen har fordel.

a) Forklar at

$$\begin{aligned} x &= 0.6y + 0.4z \\ y &= 0.4x + 0.6 \\ z &= 0.6x \end{aligned}$$

b) Finn x, y og z.

4.2 Trappeform

Vi skal nå ta en nærmere kikk på prosedyren vi introduserte i forrige seksjon. For oversiktens skyld skal vi stort sett arbeide med matriser og ikke ligningssystemer, så vi antar at vi starter med en matrise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Med en *radoperasjon* på A mener vi én av følgende operasjoner:

(i) Bytte om to rader i A

(ii) Gange en av radene i A med et tall forskjellig fra 0

(iii) Velge én av radene i A og erstatte den med det vi får når vi legger til et multiplum av en av de *andre* radene.

Legg merke til at dette er nøyaktig de samme operasjonene som vi brukte på ligningssystemene i forrige seksjon.

Definisjon 4.2.1 *Vi sier at to $m \times n$-matriser A, B er* radekvivalente *dersom det finnes en sekvens av radoperasjoner som forvandler A til B. Vi skriver $A \sim B$ når A og B er radekvivalente.*

Eksempel 1: Matrisene

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

og

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

er radekvivalente siden A kan forvandles til B gjennom denne sekvensen av radoperasjoner (radene i matrisen kalles I, II og III, og symbolene over $\sim$-tegnene antyder hvilke operasjoner vi bruker):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{2}I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{II+(-1)I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{III+I}{\sim}$$

$$\overset{III+I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \overset{II \leftrightarrow III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{5}II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B \qquad \clubsuit$$

Det er lett å se at dersom vi kan forvandle A til B ved hjelp av radoperasjoner, så kan vi også bruke radoperasjoner til å forvandle B til A. Alt vi behøver å gjøre, er å "reversere" de operasjonene som forvandlet A til B — der vi tidligere ganget en rad med 3, ganger vi den nå med $\frac{1}{3}$; der vi tidligere la til 7 ganger en rad, legger vi nå til -7 ganger den samme raden, og der vi tidligere byttet om to rader, bytter vi dem nå tilbake igjen. I tillegg må vi passe på å begynne bakfra; vi begynner med å reversere den *siste* operasjonen som var med på å forvandle A til B. Det neste eksemplet viser hvordan dette foregår i praksis.

Eksempel 2: I forrige eksempel forvandlet vi matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{til} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

og vi skal nå vise hvordan vi kan reversere denne prosedyren slik at B blir forvandlet til A. Siden den siste operasjonen vi brukte da vi forvandlet A til B, var å gange rad 2 med $\frac{1}{5}$, gjør vi nå det omvendte — vi ganger rad 2 med 5:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{5II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Den nest siste operasjonen vi brukte, var å bytte om rad 2 og 3, så nå bytter vi tilbake igjen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{II \leftrightarrow III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Operasjonen før dette var å legge rad 1 til rad 3, så nå trekker vi isteden rad 1 fra rad 3 (for å holde oss i vår offisielle språkbruk, burde vi heller si at vi ganger rad I med -1 og legger resultatet til rad 3):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \overset{III+(-1)I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Den neste operasjonen vi må reversere, er å legge -1 ganger rad 1 til rad 2. Vi legger derfor rad 1 til rad 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{II+I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Det gjenstår nå bare å reverse én operasjon. Den var å gange rad 1 med $\frac{1}{2}$, så nå ganger vi rad 1 med 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{III+(-1)I}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Dermed har vi reversert hele prosedyren og gjort B om til A. ♣

Som antydet i forrige seksjon, er hensikten med radoperasjoner å forvandle en vilkårlig matrise til en matrise på trappeform. Aller først må vi definere hva dette betyr:

Definisjon 4.2.2 *En matrise er på* trappeform *dersom:*

(i) Enhver rad består enten bare av nuller, eller så er det første ikke-null elementet et ett-tall.

(ii) Enhver rad som ikke bare består av nuller, begynner med minst én null mer enn raden over.

En matrise på trappeform blir også kalt en trappematrise.

Legg merke til at dersom en trappematrise har rader som bare består av nuller, må disse være samlet nederst i matrisen (det følger fra punkt (ii) ovenfor).

Eksempel 3: Følgende matriser er på trappeform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Disse matrisene er ikke på trappeform (forklar hvorfor):

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

♣

For å kunne beskrive matriser på trappeform trenger vi litt terminologi. Det første ikke-null elementet i en rad (det er nødvendigvis et ett-tall) kalles et *pivotelement*, og søylen det står i, kalles en *pivotsøyle* (se illustrasjonen nedenfor). Pivotelementer og pivotsøyler kommer til å spille en sentral rolle i teorien i dette kapitlet.

pivotelementer

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

pivotsøyler

Vi har allerede nevnt flere ganger at poenget med radoperasjoner er å forvandle en gitt matrise til en matrise på trappeform. Det neste resultatet forteller oss at dette alltid er mulig.

Setning 4.2.3 *Enhver matrise er radekvivalent med en matrise på trappeform.*

Bevis: Dette beviset er bare en systematisering av den metoden vi har brukt i eksemplene. Først ser vi på søylene i matrisen og plukker ut den første som ikke bare består av nuller. Ved eventuelt å bytte om to rader kan vi sørge for at det øverste elementet i denne søylen ikke er null, og ved å gange den øverste raden med et passende tall, kan vi gjøre om dette elementet til et ett-tall. Ved hjelp av dette ett-tallet kan vi nå eliminere alle ikke-null elementer i søylen under — vi bare ganger den øverste linjen med et passe tall og adderer resultatet til den raden vi arbeider med. Når dette arbeidet er ferdig, står ett-tallet alene igjen i søylen og er blitt vårt første pivotelement. Vi "glemmer" nå den øverste raden i matrisen og arbeider bare med resten (så når vi nå sier "restmatrisen" mener vi det som står igjen etter at vi har fjernet første rad).

Vi begynner nå prosedyren på nytt med å lete oss frem til den første søylen i "restmatrisen" som ikke bare består av nuller. Ved eventuelt å bytte om rader sikrer vi oss at det øverste elementet ikke er 0, og ved å gange raden med et passende tall, forvandler vi elementet til et ett-tall. På vanlig måte bruker vi dette ett-tallet til å eliminere elementene i søylen nedenfor. Nå har vi funnet vårt andre pivotelement, så vi "glemmer" raden det står i, og gjentar prosedyren på radene nedenfor.

Denne prosedyren fortsetter inntil én av to ting skjer. Enten er det ikke flere rader igjen (og da er vi ferdige fordi det står et pivotelement i hver eneste rad), eller så består alle søylene i den "restmatrisen" vi ser på, av bare nuller (og da er vi ferdige fordi vi har pivotelementer i alle de radene som ikke bare består av nuller). □

Bemerkning: Når vi bruker radoperasjoner til å bringe en matrise A over på trappeform, sier vi at vi *radredusere* A. Det er greit å være klar over at matriser kan radreduseres på forskjellige vis — når du bruker metoden, har du ofte et valg mellom flere muligheter (f.eks. hvilke rader du vil bytte om på), og det endelige resultatet vil ofte avhenge av hvilke valg du gjør underveis. Det kan derfor godt hende at fasitsvaret på en oppgave er forskjellig fra ditt svar, selv om ditt også er riktig. Det viser seg imidlertid at alle trappeformene til en matrise har de samme pivotsøylene (og dermed de samme pivotelementene), og dette kan du bruke som en sjekk på at svaret ditt er rimelig.

Ligningssystemer på trappeform

Vi skal nå vende tilbake til lineære ligningssystemer og se dem i lys av det vi nettopp har lært. Vi starter med et generelt, lineært ligningssystem med n ligninger og m ukjente (vi insisterer altså ikke på at det skal være like mange ligninger som ukjente — det finnes en del problemstillinger der det er aktuelt å se på både "for få" og "for mange" ligninger):

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad & \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Vi tar nå den utvidede matrisen

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right)$$

og bringer den på trappeform ved hjelp av radoperasjoner. Den matrisen C vi da får, tilhører et ligningssystem med de samme løsningene som det opprinnelige systemet. I dette systemet vil noen variable ("ukjente") korrespondere til pivotsøyler, og disse kaller vi *basisvariable*, mens de andre kalles *frie variable*. La oss se på et eksempel:

Eksempel 4: Vi starter med ligningssystemet

$$\begin{aligned}
x + 2y + z &= 1 \\
-x + y - z &= 0 \\
x + 5y + z &= 2
\end{aligned}$$

Den utvidede matrisen er

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c}
1 & 2 & 1 & 1 \\
-1 & 1 & -1 & 0 \\
1 & 5 & 1 & 2
\end{array}\right)$$

Radreduserer vi B, får vi:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{II+I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{III+(-1)I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III-II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{3}II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C$$

I denne trappematrisen C er søyle 1 og 2 pivotsøyler. Søyle 1 og 2 tilsvarer variablene x og y, så disse er basisvariable, mens z (som tilsvarer søyle 3) er en fri variabel. Vi ser at C er den utvidede matrisen til systemet

? 1/3

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ y &= \frac{1}{3} \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Den nederste ligningen er alltid oppfylt og kan neglisjeres. De to andre ligningene legger ingen føringer på den *frie variabelen* z som kan velges fritt, og når den er valgt, kan vi regne ut verdiene til basisvariablene x og y. Vi får $y = \frac{1}{3}$ og $x = 1 - 2y - z = \frac{1}{3} - z$ (at y er uavhengig av z er en tilfeldighet).

La oss nå forandre eksemplet litt. Dersom vi endrer konstantleddet i den tredje ligningen i det opprinnelige problemet fra 2 til 1, får vi ligningssystemet

mer umiddelbart om 2 endres til 3

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ -x + y - z &= 0 \\ x + 5y + z &= 1 \end{aligned}$$

med utvidet matrise

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Radreduserer vi denne matrisen, ender vi opp med trappematrisen

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nå har vi fått et pivotelement i siste søyle, og det har dramatiske konsekvenser. Det korresponderende ligningssystemet er nemlig

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ y &= \frac{1}{3} \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

og her ser vi at den siste ligningen aldri kan oppfylles. Ligningssystemet har derfor ingen løsninger. ♣

Mønsteret du ser i eksemplet ovenfor er helt generelt:

Setning 4.2.4 *Anta at den utvidede matrisen til et lineært ligningssystem kan radreduseres til trappematrisen C. Da gjelder:*

(i) Dersom den siste søylen i C er en pivotsøyle, har ligningssystemet ingen løsninger.

Dersom den siste søylen ikke *er en pivotsøyle, har vi videre:*

(ii) Dersom alle de andre søylene i C er pivotsøyler, har ligningssystemet nøyaktig én løsning.

(iii) Dersom minst én av de andre søylene ikke *er en pivotsøyle, har ligningssystemet uendelig mange løsninger.*

Bevis: Siden det opprinnelige ligningssystemet og det som hører til C, har nøyaktig de samme løsningene, kan vi konsentrere oss om ligningssystemet til C. Anta først at den siste søylen i C er en pivotsøyle. Da inneholder ligningssystemet en ligning av formen $0 = 1$, og har derfor ingen løsninger.

Anta så at den siste søylen i C ikke er en pivotsøyle. Dersom det finnes andre søyler som ikke er pivotsøyler, har systemet frie variable. Gi disse hvilke som helst verdier du ønsker. Du kan nå regne ut verdien til de andre variablene ved å begynne nedenfra med den nederste (ikke-trivielle) ligningen. Denne ligningen gir deg verdien til den siste av basisvariablene. Gå nå videre til ligningen over og regn ut den tilhørende basisvariablen. Fortsett oppover i ligningssystemet til du har regnet ut alle basisvariablene. Dette viser at for hvert valg av frie variable, har ligningssystemet nøyaktig én løsning. Finnes det frie variable, har derfor ligningssettet uendelig mange løsninger. Finnes det ikke frie variable (dvs. at alle søyler unntatt den siste er pivotsøyler), må ligningssettet ha nøyaktig én løsning. □

Det er ofte viktig å vite når et ligningssystem har nøyaktig én løsning (vi kaller dette en *entydig* løsning), og vi tar derfor med dette som et separat resultat:

Korollar 4.2.5 *Anta at den utvidede matrisen til et lineært ligningssystem kan radreduseres til trappematrisen C. Da har ligningssystemet en entydig løsning hvis og bare hvis alle søyler i C unntatt den siste, er pivotsøyler.*

Bevis: Dette er bare en omskrivning av punkt (ii) i setningen ovenfor. □

Matrisen nedenfor viser en typisk trappematrise som tilsvarer et ligningssystem med entydig løsning:

$$C = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & -2 & 3 & 0 & 4 & & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -2 & & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

Vi ser at pivotelementene begynner øverst i venstre hjørne og fortsetter nedover diagonalen inntil de når den nest siste søylen. Under dette nivået kan det godt være noen rader med bare nuller.

Ligningssystemer med samme venstreside

Både i teori og praksis hender det ofte at vi har behov for å løse "det samme" ligningssystemet gang på gang med forskjellig høyreside. Mer presist betyr dette at vi ønsker å løse systemet

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

mange ganger for de samme koeffisientene a_{ij}, men for forskjellige b_i. Et spørsmål som da dukker opp, er når det er mulig å løse ligningssystemet for *alle* valg av $b_1, b_2, \ldots, b_m$. For å løse dette problemet ser vi på *matrisen* (koeffisient-)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

til ligningssystemet (ikke bland denne sammen med den *utvidede matrisen*

[A|b]

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

der b-ene er med!) Vi radreduserer så A til en trappematrise D. Det viser seg at ligningssystemet vårt har en løsning for *alle* valg av $b_1, b_2, \ldots, b_m$ dersom alle *radene* i D inneholder et pivotelement.

(= hver rad i D)

Setning 4.2.6 *Anta at*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kan radreduseres til trappematrisen D. Da har ligningssystemet

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad &\vdots \;\; \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

en løsning for <u>alle</u> valg av $b_1, b_2, \ldots, b_m$ hvis og bare hvis alle radene i D inneholder pivotelementer.

Bevis: Anta først at D har pivotelementer i alle rader, og velg $b_1, b_2, \ldots, b_m$. La B være den utvidede matrisen

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Vi vet at A lar seg forvandle til D gjennom en sekvens av radoperasjoner, og vi lar nå C være den matrisen vi får når vi lar B gjennomgå den samme sekvensen av operasjoner. Da er

$$C = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \ldots & d_{1n} & \tilde{b}_1 \\ d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \ldots & d_{mn} & \tilde{b}_m \end{pmatrix}$$

der d_{ij} er elementene i D og $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots, \tilde{b}_m$ er resultatet av å bruke disse radoperasjonene på $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Siden D har et pivotelement i hver rad, kan ikke den siste søylen i C være en pivotsøyle, og følgelig har ligningssystemet minst en løsning.

Bedre notasjon: $[A|b] \sim [C|d]$?

Anta nå omvendt at D mangler pivotelement i noen av radene, og la rad nummer j være den første av disse. Hvis vi kan finne $b_1, b_2, \ldots, b_m$ slik at $\tilde{b}_j$ er lik 1, vil C få et pivotelement i siste søyle, og ligningssystemet vil da ikke ha en løsning. Siden radoperasjonene er reverserbare, er det ikke vanskelig å finne et slikt sett med b-er. Vi velger oss rett og slett et sett $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots, \tilde{b}_m$

med den egenskapen vi ønsker oss ved å la $\tilde{b}_j = 1$, mens $\tilde{b}_i = 0$ for alle andre indekser i. Så danner vi matrisen

$$C = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} & \tilde{b}_1 \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mn} & \tilde{b}_m \end{pmatrix}$$

Legg merke til at C er på trappeform og at $\tilde{b}_j$ er et pivotelement i siste rad. Nå bruker vi de omvendte av de operasjonene som førte A til B til å føre C tilbake til en matrise på formen

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

(husk reverseringsprosedyren i eksempel 2). Ligningssystemet til B kan ikke ha en løsning siden vi kan bruke de opprinnelige radoperasjonene til å forvandle B til C, og C har et pivotelement i siste rad. □

Legg merke til at dersom $m > n$ (dvs. at matrisen A har flere rader enn søyler), så er det ikke plass til et pivotelement i hver rad (husk at pivotelementene må flytte seg minst ett skritt mot høyre for hver rad), og ligningssystemet kan derfor ikke ha løsninger for alle $b_1, b_2, \dots, b_m$.

La oss også se på betingelsen for at ligningssystemet har en *entydig* løsning for alle valg at $b_1, b_2, \dots, b_m$:

Korollar 4.2.7 *Anta at*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kan radreduseres til trappematrisen D. Da har ligningssystemet

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad & \vdots \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

en entydig løsning for alle valg av $b_1, b_2, \dots, b_m$ hvis og bare hvis alle radene og alle søylene i D inneholder pivotelementer. Dette betyr at D er en kvadratisk matrise med pivotelementer på diagonalen.

Bevis: Vi vet fra setningen ovenfor at det må være pivotelementer i alle rader dersom vi skal ha løsninger for alle valg av $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Vi vet også at for å få entydige løsninger, må vi ha pivotelementer i alle søyler. Skal vi få plass til pivotelementer i alle rader og alle søyler, må D være en kvadratisk matrise med pivotelementer på diagonalen (prøv deg frem, så vil du se). □

Bemerkning: Ifølge resultatet ovenfor er det bare mulig å ha entydige løsninger for alle $b_1, b_2, \ldots, b_m$ dersom D — og dermed A — er en kvadratisk matrise, dvs. at vi har like mange ligninger som ukjente. Dette er en viktig observasjon som vi skal møte igjen i ulike forkledninger senere i kapitlet.

Det er på tide med et eksempel:

Eksempel 5: Vi skal undersøke om ligningssystemet

$$\begin{aligned} 3x + y - 2z &= b_1 \\ -x + 2y - z &= b_2 \\ x + z &= b_3 \end{aligned}$$

har en løsning for alle valg av b_1, b_2, b_3. Matrisen til systemet er

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bruker vi radoperasjoner på denne matrisen, får vi (vi tillater oss å ta flere operasjoner i slengen slik at ikke utledningen skal bli for lang):

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{I \leftrightarrow II}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{II+3I \\ III+I}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{7}II}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{III+(-2)II}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{10}{7} \end{pmatrix} \overset{\substack{(-1)I \\ \frac{7}{10}III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siden den siste matrisen har et pivotelement i hver rad, har ligningssystemet en løsning for alle valg av b_1, b_2, b_3. Siden det også er et pivotelement i hver søyle, er denne løsningen entydig. ♣

Oppgaver til seksjon 4.2

1. Avgjør om matrisene er på trappeform:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

2. Reduser matrisen til trappeform:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 12 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

3. Løs ligningssystemet ved å radredusere den utvidede matrisen.

$$\begin{aligned} x - y + 2z &= 1 \\ 2x + y + z &= 1 \\ -2x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

4. Løs ligningssystemet ved å radredusere den utvidede matrisen.

$$\begin{aligned} 3x - 4y + z &= 2 \\ x - 2y &= 1 \\ -2x + 2y - z &= -1 \end{aligned}$$

5. Løs ligningssystemet ved å radredusere den utvidede matrisen.

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ 2x - 4y + 3z &= 1 \\ 3x - 2y + 4z &= 6 \end{aligned}$$

6. Løs ligningssystemet ved å radredusere den utvidede matrisen.

$$\begin{aligned} x + 3y - z + 3u &= 4 \\ x + 2y - 2z + 3u &= 0 \\ 2x + 2y - 5z + 5u &= 1 \end{aligned}$$

7. Avgjør om ligningssystemet har en løsning for alle valg av b_1, b_2, b_3:

$$\begin{aligned} 2x + 4y - 4z &= b_1 \\ 2x - y + 3z &= b_2 \\ x - y + 2z &= b_3 \end{aligned}$$

8. Avgjør om ligningssystemet har en løsning for alle valg av b_1, b_2, b_3:

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= b_1 \\ -2x - 4y + z &= b_2 \\ x + 2y + z &= b_3 \end{aligned}$$

9. a) Reduser matrisen til trappeform:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

b) Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y + 2u &= 5 \\ y + z + u &= 3 \\ -2y + z + u &= 0 \\ x + 2y + z + 3u &= 7 \end{aligned}$$

10. Et bilutleiefirma har kontor i tre byer A, B og C. Av de bilene som leies i A, blir 60% returnert i A, 30% i B og 10% i C. Av de bilene som leies i B, blir 30% returnert i A, 50% i B og 20% i C. Av de bilene som leies i C, blir 60% returnert i A, 10% i B og 30% i C. Bilfirmaet har totalt 120 biler. Hvordan skal det fordele disse bilene i A, B og C slik at det i hver by returneres like mange biler som det leies ut?

4.3 Redusert trappeform

Når vi omformer en matrise til trappeform, sørger vi for at elementene *under* pivotelementene alltid er null, men vi bryr oss ikke om elementene *over* pivotelementene. For noen formål lønner det seg å sørge for at disse elementene også er null. Vi sier da at matrisen er på *redusert trappeform*. Her er den presise definisjonen:

(= reduced row echelon form)

Definisjon 4.3.1 *Vi sier at en matrise er på* redusert trappeform *dersom den er på trappeform og alle elementene i pivotsøylene, unntatt pivotelementene, er 0.*

Eksempel 1: Disse matrisene er på redusert trappeform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Disse matrisene er på trappeform, men *ikke* på redusert trappeform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

♣

Alle matriser kan omformes til redusert trappeform ved hjelp av radoperasjoner. Vi radreduserer dem først til vanlig trappeform, og bruker deretter pivotelementene til å skaffe oss de resterende nullene i pivotsøylene. Det er lurest å begynne bakfra med de pivotelementene som står lengst til høyre. Her er et eksempel:

Eksempel 2: Vi starter med en matrise som er på vanlig trappeform

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Deretter tar vi utgangspunkt i pivotelementet nederst til høyre, og bruker det til å skaffe oss nuller i posisjonene over:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{II+(-3)III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{I+(-2)III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dermed har vi ordnet opp i den bakerste søylen, og vi går nå mot venstre på jakt etter neste pivotsøyle. Det er søyle nummer 3, og vi bruker nå pivotelementet her til å skaffe flere nuller:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{I+3II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dermed er matrisen brakt på redusert trappeform. ♣

Poenget med å starte prosessen bakfra er at vi slipper unna mye regnearbeid fordi de fleste tallene vi adderer er 0.

Setning 4.3.2 *Enhver matrise er radekvivalent med en matrise på redusert trappeform.*

Bevis: Vi vet allerede at matrisen er radekvivalent med en matrise på vanlig trappeform, så alt vi trenger, er å vise er at enhver matrise på vanlig trappeform er ekvivalent med en matrise på reduset trappeform. Dette følger fra prosedyren vi har beskrevet ovenfor. Det eneste som kunne gått galt med denne prosedyren, var hvis noen av de operasjonene vi gjorde underveis, "ødela" nuller vi allerede hadde skaffet oss på et tidligere tidspunkt, men det er lett å sjekke at det ikke skjer. □

Bemerkning: Det viser seg at den reduserte trappeformen til en matrise er entydig bestemt — uansett hvilken sekvens av radoperasjoner du bruker for å bringe en matrise på redusert trappeform, blir sluttresultatet det samme. Vi skal derfor av og til snakke om "den reduserte trappeformen" i bestemt form.

(Hvorfor? Forskjellige reduserte trappeformer har forskjellige løsningsmengder.)

Det neste resultatet skal vi ofte få bruk for. Husk at korollar 4.2.7 forteller oss at ligningssystemet

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

bare kan ha en entydig løsning for alle valg av $b_1, b_2, \ldots, b_m$ dersom $m = n$, dvs. dersom vi har like mange ligninger som ukjente.

Setning 4.3.3 *Ligningssystemet*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

har en entydig løsning for alle valg av $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *hvis og bare hvis den tilhørende matrisen*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

er radekvivalent med identitetsmatrisen

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Bevis: Dersom A er radekvivalent med identitetsmatrisen, følger det umiddelbart fra korollar 4.2.7 at ligningssystemet alltid har en entydig løsning. På den annen side: Dersom ligningssystemet alltid har en entydig løsning, vet vi fra korollar 4.2.7 at A er radekvivalent med en trappematrise der alle pivotelementene ligger på diagonalen. Den reduserte trappeformen til en slik matrise er identitetsmatrisen (hvorfor?), og følgelig er A radekvivalent med identitetsmatrisen. □

Redusert trappeform i MATLAB

Det er ganske kjedelig å føre store matriser over på trappeform for hånd, men heldigvis finnes det hjelpemidler. Dersom du har tastet inn en matrise A i MATLAB, vil kommandoen `>> rref(A)` få MATLAB til å regne ut den reduserte trappeformen til A. Her er et eksempel på en kjøring:

```
>> A=[2 -1 4 5 6
6 -1 3 2 1
-2 3 1 0 5];

>> B=rref(A)

B =

   1.0000        0        0   -0.4286   -0.7500
        0   1.0000        0   -0.7143    0.5000
        0        0   1.0000    1.2857    2.000
```

Kommandonavnet `rref` kan virke litt mystisk, men det skyldes rett og slett at redusert trappeform heter *reduced row echelon form* på engelsk. Vanlig trappeform heter *row echelon form.*

La oss se hvordan vi kan bruke kommandoen `rref` til å løse et ligningssystem.

Eksempel 3: Vi skal løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z + u + v &= 2 \\ 3x + y - z + 2u - v &= 3 \\ -x - 2y + 4z + u + 2v &= 4 \end{aligned}$$

Den utvidede matrisen er

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

og putter vi denne inn i MATLAB og bruker `rref`, får vi

```
>> B=[2 -1 3 1 1 2
3 1 -1 2 -1 3
-1 -2 4 1 2 4];

>> C=rref(B)

C =

    1.0000         0    0.4000         0         0   -0.5000
         0    1.0000   -2.2000         0   -1.0000   -0.5000
         0         0         0    1.0000         0    2.5000
```

Den reduserte trappeformen er altså

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & -2.2 & 0 & -1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2.5 \end{pmatrix}$$

Vi ser at pivotsøylene er søyle 1, 2 og 4, og at de frie variablene er z (som korresponderer til søyle 3) og v (som korresponderer til søyle 5). Vi kan derfor velge z og v fritt og løse for de andre variablene. Det er lettest å gjøre dette hvis vi først skriver opp ligningssystemet til C:

$$\begin{aligned} x + 0.4z &= -0.5 \\ y - 2.2z - v &= -0.5 \\ u &= 2.5 \end{aligned}$$

Vi ser at løsningene er gitt ved

$$x = -0.5 - 0.4z$$

$$y = -0.5 + 2.2z + v$$

$$z = z$$

$$u = 2.5$$

$$v = v$$

der z og v kan velges fritt. ♣

Oppgaver til seksjon 4.3

1. Avgjør om matrisene er på redusert trappeform:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Omform matrisene til redusert trappeform:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & -4 & 5 \\ -1 & -2 & 8 \end{pmatrix}$

3. Bruk MATLAB til å omforme disse matrisene til redusert trappeform:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 4 & 6 \\ -2 & 3 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.5 & 1.5 & 0.75 \\ 1 & 0.55 & 0.7 & 0.25 \\ -0.25 & 3 & 0.75 & -0.1 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0.5 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0.5 & -1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

4. Avgjør om ligningssystemet har en entydig løsning for alle valg av b_1, b_2, b_3. Bruk gjerne MATLAB som hjelpemiddel.

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= b_1 \\ 2x + 4y + 3z &= b_2 \\ -x + 3y + 2z &= b_3 \end{aligned}$$

5. Avgjør om ligningssystemet har en entydig løsning for alle valg av b_1, b_2, b_3. Bruk gjerne MATLAB som hjelpemiddel.

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= b_1 \\ -x + 3y + 2z &= b_2 \\ 3x - 4y - z &= b_3 \end{aligned}$$

6. Finn alle løsningene til ligningssystemet. Bruk først MATLAB til å skrive den utvidede matrisen på redusert trappeform.

$$\begin{aligned} 2x - y + z + 3u &= -4 \\ -x + 2y + 4z + 3u &= 2 \\ -2x + y + 3z - 4u &= -1 \end{aligned}$$

7. Finn alle løsningene til ligningssystemet. Bruk først MATLAB til å skrive den utvidede matrisen på redusert trappeform.

$$\begin{aligned} x + y - z + 2u - v &= 1 \\ -2x - 2y + z - u + v &= 2 \\ 3x + 3y - 2u + 2v &= 1 \end{aligned}$$

4.4 Matriseligninger

Hittil i dette kapitlet har vi arbeidet med ligningssystemer. Vi har riktignok skrevet en del matriser, men de har bare vært forkortede skrivemåter for ligningssystemer, og vi har aldri utnyttet de regnereglene for matriser som vi studerte i kapittel 1. Nå skal vi koble disse to tingene sammen og se hvordan radreduksjon kan være et nyttig verktøy i studiet av matriser.

Før vi begynner, kan det være lurt å gjøre to observasjoner som ofte er nyttige å ha i bakhodet når man arbeider med matriser. Dersom $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ er vektorer i $\mathbb{R}^m$, lar vi

$$A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

være $m \times n$-matrisen med $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ som søyler. Ganger vi denne matrisen med vektoren

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ser vi at

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

(regn ut begge sider og se at det stemmer). Produktet $A\mathbf{x}$ er altså lineærkombinasjonen av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ med $x_1, x_2, \ldots, x_n$ som vekter.

Anta nå at $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k)$ er en $n \times k$-matrise med $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ som søyler. Da er

$$AB = (A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, \ldots, A\mathbf{b}_k)$$

(sjekk ved å regne ut begge sider). Vi får altså søylene i produktmatrisen AB ved å gange hver av søylene i B med A. Disse to observasjonene er ofte nyttige når man ønsker å forstå matriseutregninger.

La oss nå begynne arbeidet med å koble sammen radreduksjoner og matriseoperasjoner. Dersom vi starter med en $m \times n$-matrise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

og en søylevektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

kan vi regne ut en søylevektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

ved å ta produktet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Vi kan også snu problemstillingen på hodet: Dersom vi starter med A og $\mathbf{b}$, ønsker vi å finne en vektor $\mathbf{x}$ slik at

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{4.4.1}$$

Vi kaller dette en *matriseligning*. Dersom vi skriver ut ligning (4.4.1) på komponentform, får vi

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{4.4.2}$$

Det å løse matriseligningen (4.4.1) er altså det samme som å løse ligningssystemet

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

All den kunnskapen vi har skaffet oss om lineære ligningssystemer, kan vi nå overføre til matriseligninger. Først litt notasjon — vi skal skrive

$$B = (A, \mathbf{b})$$

for den *utvidede matrisen*

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

La oss nå oversette setning 4.2.4 til matrisespråk.

Setning 4.4.1 *La $B = (A, \mathbf{b})$ være den utvidede matrisen til matriseligningen*

$(A|b)$
$\sim [C|d]$?

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

og anta at B kan radreduseres til trappematrisen C. Da gjelder:

(d)

(i) Dersom den siste søylen i C er en pivotsøyle, har matriseligningen ingen løsninger.

Dersom den siste søylen ikke *er en pivotsøyle, har vi videre:*

(ii) Dersom alle de andre søylene i C er pivotsøyler, har matriseligningen nøyaktig én løsning.

(iii) Dersom minst én av de andre søylene ikke *er en pivotsøyle, har matriseligningen uendelig mange løsninger.*

Bevis: Dette er bare en omformulering av setning 4.2.4. □

Eksempel 1: Finn alle løsninger til matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ når

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi bruker først radoperasjoner på den utvidede matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dersom vi velger å bruke MATLAB, får vi

[A b]

```
B=[2 -1 3 3 4 1
3 0 2 1 -1 4
-1 2 -4 -5 0 1];

>> C=rref(B)

C =

    1.0000         0    0.6667    0.3333         0    1.2963
         0    1.0000   -1.6667   -2.3333         0    1.1481
         0         0         0         0    1.0000   -0.1111
```

B er altså radekvivalent med matrisen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.6667 & 0.3333 & 0 & 1.2963 \\ 0 & 1 & -1.6667 & -2.3333 & 0 & 1.1481 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.1111 \end{pmatrix}$$

Vi ser at den siste søylen ikke er en pivotsøyle, så ligningen har løsninger. Vi ser også at søyle 3 og 4 ikke er pivotsøyler, så ligningen har uendelig mange løsninger. Variablene x_3 og x_4 er frie, og velger vi verdier for disse, kan vi regne ut de andre variablene:

$$x_1 = 1.2963 - 0.6667x_3 - 0.3333x_4$$

$$x_2 = 1.1481 + 1.6667x_3 + 2.3333x_4$$

$$x_5 = -0.1111$$

Skriver vi løsningen på vektorform, har vi dermed

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1.2963 - 0.6667x_3 - 0.3333x_4 \\ 1.1481 + 1.6667x_3 + 2.3333x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ -0.1111 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1.2963 \\ 1.1481 \\ 0 \\ 0 \\ -0.1111 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -0.6667 \\ 1.6667 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -0.3333 \\ 2.3333 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Denne skrivemåten gir en god oversikt over løsningene. ♣

La oss nå undersøke når matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en løsning for *alle* vektorer $\mathbf{b}$. Svaret ligger i setning 4.2.6 og korollar 4.2.7:

Setning 4.4.2 *Anta at matrisen A er radekvivalent med trappematrisen D. Da har ligningen*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

løsning for alle vektorer $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ hvis og bare hvis alle radene i D inneholder et pivotelement. Løsningen er entydig dersom også alle søylene i D inneholder et pivotelement — dette betyr at A er en kvadratisk matrise som er radekvivalent med identitetsmatrisen.

Bevis: Som allerede nevnt er dette bare en omskrivning av setning 4.2.6 og korollar 4.2.7 til matrisespråk. □

Homogene ligninger

En matriseligning $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ kan ha ingen løsninger for noen verdier av $\mathbf{b}$ og én eller uendelig mange løsninger for andre verdier av $\mathbf{b}$. For å forstå sammenhengen er det lurt å ta utgangspunkt i *homogene* ligninger, dvs. ligninger av typen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ der høyresiden er null. En homogen ligning har alltid løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, så spørsmålet er om dette er den eneste løsningen, eller om det finnes uendelig mange andre. Fra setning 4.4.1 får vi:

Korollar 4.4.3 *Anta at matrisen A har trappeform D. Dersom alle søylene i D er pivotsøyler, har den homogene ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bare løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dersom D har søyler som ikke er pivotsøyler, har ligningen uendelig mange løsninger. Dersom A er en kvadratisk $n \times n$-matrise, betyr dette at ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har $\mathbf{0}$ som eneste løsning hvis og bare A er radekvivalent med I_n.*

Bevis: Den generelle delen av korollaret ~~er~~ følger direkte fra setning 4.4.1. Tillegget om kvadratiske matriser følger fordi en kvadratisk matrise har pivotelementer i alle søyler hvis og bare hvis alle pivotelementene står på diagonalen, og det er det samme som at den kan radreduseres til I_n. □

Den neste setningen gir oss sammenhengen mellom løsningene av homogene og inhomogene ligninger. Har du studert differens- eller differensialligninger, vil du ha sett lignende resultater før. Indeksene p og h på vektorene $\mathbf{x}_p$ og $\mathbf{x}_h$ står for henholdsvis *partikulær* og *homogen*. (= spesiell / partikulær)

Setning 4.4.4 *Anta $\mathbf{x}_p$ er en løsning av matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. De andre løsningene er da vektorene på formen*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$$

der $\mathbf{x}_h$ er en løsning av den homogene ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Bevis: Anta først at $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$ der $\mathbf{x}_h$ er en løsning av den homogene ligningen. Da er

$$A\mathbf{x} = A(\mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h) = A\mathbf{x}_p + A\mathbf{x}_h = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b},$$

så $\mathbf{x}$ er en løsning av ligningen.

Anta så at $\mathbf{x}$ er en løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, og definer $\mathbf{x}_h = \mathbf{x} - \mathbf{x}_p$. Da er $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p + \mathbf{x}_h$, og alt vi behøver å vise, er at $\mathbf{x}_h$ er en løsning av den homogene ligningen. Dette er bare et lite regnestykke:

$$A\mathbf{x}_h = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}_p = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

□

Setningen ovenfor forteller oss at dersom den inhomogene ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har løsninger, så har den like mange løsninger som den homogene løsningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Simultane løsninger av matriseligninger

Anta at vi ønsker å løse matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for flere verdier av $\mathbf{b}$, la oss si for $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}_2$, ..., $\mathbf{b} = \mathbf{b}_k$. Vi ønsker med andre ord å løse ligningene

$$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1, A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2, \ldots, A\mathbf{x}_k = \mathbf{b}_k$$

Som nevnt tidligere er dette en problemstilling som ofte dukker opp i praksis. Den er mest aktuell når ligningssystemene har entydig løsning, så vi antar at A er en kvadratisk matrise som er radekvivalent med identitetsmatrisen I_n (husk setning 4.4.2). For å løse ligningene er det naturlige å begynne med å radredusere den utvidede matrisen $(A, \mathbf{b}_1)$ til den første matriseligningen. Hvis vi gjør dette helt til vi kommer til redusert trappeform, sitter vi igjen med en matrise på formen

-e -er

&

$[A \mid \vec{b}_1]$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \tilde{b}_{11} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \tilde{b}_{21} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \tilde{b}_{n1} \end{pmatrix}$$

$\sim [C \mid \vec{d}_1]$ $\begin{bmatrix} d_{11} \\ \vdots \\ d_{n1} \end{bmatrix} : \vec{d}_1$

der $\tilde{b}_{11}, \tilde{b}_{21}, \ldots, \tilde{b}_{n1}$ er de tallene vi får når vi bruker radoperasjonene på komponentene til $\mathbf{b}_1$. Setter vi inn variablene, får vi ligningene

$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{b}_{11} \\ x_2 &= \tilde{b}_{21} \\ \vdots &\ \ \vdots \ \ \vdots \\ x_n &= \tilde{b}_{n1} \end{aligned}$$

Den siste søylen i C_1 gir oss altså løsningen av den første matriseligningen. Hvis vi gjør det samme med den andre matriseligningen, får vi på tilsvarende måte en matrise

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{12} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde{b}_{22} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{b}_{n2} \end{pmatrix}$$

der $\tilde{b}_{21}, \tilde{b}_{22}, \dots, \tilde{b}_{n2}$ er løsningen av den andre matriseligningen. Vi ser at vi har gjort nesten nøyaktig de samme operasjonene to ganger; i begge tilfeller har vi radredusert A til idententitsmatrisen I_n, den eneste forskjellen er at vi har hatt forskjellige sistesøyler å arbeide med. Vi kan effektivisere arbeidet ved å putte inn *alle* høyresidene $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ på en gang. Vi starter altså med matrisen

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{array}\right)$$

$[A \mid \vec{b}_1 \cdots \vec{b}_k]$

$\sim$

$[I_n \mid \vec{x}_1, \vec{x}_2 \cdots \vec{x}_k]$

der

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix}, \cdots, \mathbf{b}_k = \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}$$

Omformer vi denne matrisen til redusert trappeform, sitter vi igjen med

$$\cancel{C_1} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} & \dots & \tilde{b}_{1k} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} & \dots & \tilde{b}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{b}_{n1} & \tilde{b}_{n2} & \dots & \tilde{b}_{nk} \end{array}\right)$$

Løsningene av ligningssystemene er altså søylevektorene som står etter identitetsmatrisen.

La oss se på et enkelt eksempel:

Eksempel 2: Vi skal løse ligningene

$$A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1, A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2, A\mathbf{x}_3 = \mathbf{b}_3$$

der

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi starter med den utvidede matrisen

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

og omdanner denne til redusert trappeform

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\frac{1}{2}I}{\sim} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{II+(-3)I}{\sim} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & -2 \end{array}\right) \overset{-\frac{2}{5}II}{\sim} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} & \frac{4}{5} \end{array}\right)$$

$$\overset{I+(-\frac{1}{2})II}{\sim} \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} & \frac{4}{5} \end{array}\right)$$

bedre typografi?

$\begin{pmatrix} 3/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$

Dette betyr at løsningene til de tre matriseligningene er henholdsvis

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Sjekk svarene ved å sette inn i ligningene! ♣

For store ligningssystemer (som er det man ofte støter på i praksis) lønner det seg å bruke MATLAB til å foreta radreduksjonen.

Oppgaver til seksjon 4.4

– en

1. Finn alle løsningene av matriseligning $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ når:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

2. Løs ligningene $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$ og $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$ når $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

3. Løs ligningene $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$ og $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$ når $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. a) Bring matrisen på trappeform:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) La

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ h \\ 0 \end{pmatrix}$$

Avgjør for hvilke verdier av h ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har løsninger, og finn løsningene når de finnes.

5. I denne oppgaven er C matrisen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a^2 - a & 3 \\ -1 & 1 & -3 & a \end{pmatrix}$$

der a er et reelt tall.

a) Reduser C til trappeform.

b) Vi lar $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & a^2 - a \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}$. For hvilke verdier av a har ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ henholdsvis én, ingen og uendelig mange løsninger?

6. I denne oppgaven er C matrisen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 3 \\ -1 & 2 & a^2 + 3a & -3a \end{pmatrix}$$

der a er et reelt tall.

a) Reduser C til trappeform.

b) Vi lar $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & a^2 + 3a \end{pmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3a \end{pmatrix}$. For hvilke verdier av a har ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ henholdsvis én, ingen og uendelig mange løsninger?

4.5 Inverse matriser

Husk at hvis A er en $n \times n$-matrise, så er A^{-1} *den inverse matrisen* til A dersom

$$AA^{-1} = I_n \quad \text{og} \quad A^{-1}A = I_n \tag{4.5.1}$$

Hvis $AB = B'A = I_n$ & $AC = CA = I_n$ er $B = BI_n = BAC = I_nC = C$.

I seksjon 1.7 viste vi at en kvadratisk matrise kan ha høyst én invers matrise, og at det finnes mange matriser som ikke har en invers. Hittil har vi imidlertid ikke hatt effektive metoder til å finne ut om en matrise er inverterbar, eller til å regne ut den inverse matrisen når den finnes. I denne seksjonen skal vi bruke teorien for matriseligninger til å finne slike metoder.

Det er ikke så rart at det er en nær sammenheng mellom matriseligninger og inverse matriser. Dersom matrisen A er inverterbar, kan vi nemlig løse matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ved å gange med den inverse A^{-1} på begge sider. Vi får da $A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{b}$ som kan forenkles til $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ siden $A^{-1}(A\mathbf{x}) = (A^{-1}A)\mathbf{x} = I_n\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Dette betyr at dersom A er inverterbar, har ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ en entydig løsning $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$. Vi kan med andre ord ikke regne med å finne en invers matrise med mindre ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en entydig løsning for alle $\mathbf{b}$, dvs. med mindre A er radekvivalent med identitetsmatrisen I_n (husk setning 4.4.2). Et av de teoretiske resultatene i denne seksjonen er at vi faktisk har en fullstendig korrespondanse her — en kvadratisk matrise er inverterbar hvis og bare hvis den er er radekvivalent med identitetsmatrisen (se setning 4.5.4). Det viser seg at beviset for dette resultatet leder oss til en effektiv måte å finne inverse matriser på, men før vi kommer så langt, er det noen teoretiske spørsmål vi må rydde opp i.

(kvadratiske)

Det første vi skal vise er at en ensidig invers også er en tosidig invers — det vil si at hvis en matrise tilfredsstiller én av betingelsene i (4.5.1), så tilfredsstiller den automatisk den andre. Vi begynner med to hjelpesetninger.

Lemma 4.5.1 *Anta at B og C er to $m \times n$-matriser slik at $B\mathbf{x} = C\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Da er $B = C$.*

Bevis: Det er nok å vise at dersom $B \neq C$, så finnes det en vektor $\mathbf{x}$ slik at $B\mathbf{x} \neq C\mathbf{x}$. Det er ikke så vanskelig: Siden $B \neq C$, finnes det minst ett par av indekser i, j slik at $b_{ij} \neq c_{ij}$. Velger vi $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$, ser vi at $B\mathbf{x} \neq C\mathbf{x}$ siden de i-te komponentene til de to vektorene er henholdsvis b_{ij} og c_{ij}. □

I den neste hjelpesetningen får vi bruk for våre resultater fra forrige seksjon.

Lemma 4.5.2 *La A være en $n \times n$-matrise og anta at det finnes en $n \times n$-matrise B slik at $AB = I_n$ (B er altså en høyreinvers til A). Da har matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ en entydig løsning for alle $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Søylene $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ til B er løsningene til ligningene $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1, A\mathbf{x} = \mathbf{e}_2, \ldots, A\mathbf{x} = \mathbf{e}_n$.*

Bevis: La $\mathbf{b}_j$ være den j-te søylen i B. Da er $A\mathbf{b}_j = \mathbf{e}_j$ (dette skyldes at når du regner ut $A\mathbf{b}_j$ gjør du akkurat det samme som når du regner ut den j-te søylen i AB, og den j-te søylen i AB er $\mathbf{e}_j$ siden $AB = I_n$) . Dette betyr at $\mathbf{b}_j$ er en løsning av ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$.

For å vise at ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ har en løsning for *alle* $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, observerer vi først at enhver $\mathbf{c}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Vi har:

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$= c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + \cdots + c_n\mathbf{e}_n$$

Hvis vi nå lar $\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$ (der $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ er som ovenfor), får vi

$$A\mathbf{x} = A(c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n) = c_1A\mathbf{b}_1 + c_2A\mathbf{b}_2 + \cdots + c_nA\mathbf{b}_n =$$
$$= c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + \cdots + c_n\mathbf{e}_n = \mathbf{c}$$

Dette viser at ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ har en løsning for alle $\mathbf{c}$, og det gjenstår å vise at denne løsningen er entydig.

Her kobler vi inn teorien fra forrige seksjon. Vi tenker oss først at vi bruker radoperasjoner til å redusere A til en trappematrise D. Siden ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ har en løsning for alle $\mathbf{c}$, forteller setning 4.4.2 oss at D har et pivotelement i hver rad. Siden D er kvadratisk, må D da også ha et pivotelement i hver søyle (ellers er det ikke plass til et pivotelement i hver rad), og ifølge setning 4.4.2 er da løsningen av $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ entydig. □

∴ Kvadratisk A & $Ax = c$ alltid løsning ⇒ entydig løsning!

Vi kan nå vise at en ensidig invers er en tosidig invers.

Setning 4.5.3 *Anta at A og B er to $n \times n$-matriser. Dersom*

$$AB = I_n,$$

så er A og B inverterbare, og $A^{-1} = B$, $B^{-1} = A$

Bevis: Det nok å vise at $BA = I_n$ siden vi da har både $AB = I_n$ og $BA = I_n$. Ifølge lemma 4.5.1 holder det å vise at

$$(BA)\mathbf{x} = I_n\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Lar vi $\mathbf{y} = (BA)\mathbf{x}$, er det altså nok å vise at $\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Bruker vi den assosiative lov for matrisemultiplikasjon (setning 1.6.2(i)) flere ganger, ser vi at

$$A\mathbf{y} = A((BA)\mathbf{x}) = A(B(A\mathbf{x})) = (AB)(A\mathbf{x}) = I_n(A\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

$BAe_j = e_j$?✓

$ABAe_j = Ae_j$

Setter vi $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$, har vi dermed både

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \text{og} \qquad A\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

Siden ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ifølge lemma 4.5.2 har en entydig løsning, betyr dette at $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, og dermed er setningen bevist. □

Det neste resultatet gir vår annonserte beskrivelse av når en matrise er inverterbar.

Setning 4.5.4 *En $n \times n$-matrise A er inverterbar ~~hvis~~ og bare hvis matrise-ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ har en entydig løsning for alle vektorer $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, det vil si hvis og bare hvis A er radekvivalent med identitetsmatrisen I_n.*

hver vektor

$A\mathbf{x} = \mathbf{c}$
har entydig løsning
for hver $\mathbf{c}$
pivot $\Updownarrow$
$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$
har løsning for hver $\mathbf{b}$
$\Updownarrow$
$\exists B:$
$AB = I_n$
$\Updownarrow$
A er inverterbar
$\exists B: AB = I_n = BA$

Bevis: Vi vet fra setning 4.4.2 at ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ har en entydig løsning for alle $\mathbf{c}$ hvis og bare hvis A er radekvivalent med identitetsmatrisen. Det er derfor nok å vise at A er inverterbar hvis og bare hvis $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ har entydig løsning for alle $\mathbf{c}$.

Fra setningen 4.5.2 vet vi at dersom A er inverterbar, så har ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ entydig løsning for alle $\mathbf{c}$. Anta omvendt at $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ har en entydig løsning for alle $\mathbf{c}$, og la $\mathbf{b}_j$ være løsningen av ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$. Hvis B er matrisen som har $\mathbf{b}_j$ som j-te søyle, har vi dermed $AB = I_n$, og følgelig er A inverterbar ifølge setning 4.5.3. □

Legg merke til at dersom A er inverterbar, så er løsningen til ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ gitt ved

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{c}$$

(gang ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ fra venstre med A^{-1}).

Eksempel 1: Vi skal undersøke om matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

er inverterbar. Radreduserer vi A, får vi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \overset{II+I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \overset{III+(-1)II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{3}II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Denne trappematrisen har ikke pivotelementer i siste rad og siste søyle, og ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har derfor *ikke* en entydig løsning for alle $\mathbf{b}$. Dermed vet vi at A ikke er inverterbar. ♣

En metode for å finne inverse matriser

Vi vet nå at en matrise er inverterbar hvis og bare hvis den er radekvivalent med identitetsmatrisen. Vi vet også at for å finne den inverse matrisen til A, er det nok å finne en matrise B slik at

$$AB = I_n$$

I tillegg vet vi at vi kan finne søylene $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots \mathbf{b}_n$ i B ved å løse ligningene

$$A\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1, A\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_2, \ldots, A\mathbf{b}_n = \mathbf{e}_n$$

(husk lemma 4.5.2). Fra forrige seksjon vet vi hvordan vi løser slike ligningssett — vi starter med matrisen

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right)$$

$(A | I_n)$

$\sim$

$(\ldots)$

$(I_n | B)$

$B = A^{-1}$

der vi har utvidet A med høyresidene i ligningene $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, og omformer den til redusert trappeform:

$$C = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{array}\right)$$

Løsningene av matriseligningene er da søylene til høyre for identitetsmatrisen:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{b}_n = \begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{pmatrix}$$

og den inverse matrisen blir

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Vi kan oppsummere metoden slik: Dersom vi omformer matrisen (A, I_n) til redusert trappeform, får vi matrisen (I_n, A^{-1}). La oss demonstrere metoden på et eksempel:

Eksempel 2: Vi skal bruke metoden til å invertere matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Det første vi gjør er "å skjøte på" A en identitetsmatrise slik at vi får matrisen

$$(A, I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Vi skriver nå denne matrisen på redusert trappeform:

$$(A, I_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{II+(-2)I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III+2I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{II \leftrightarrow III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{(-1)II \\ \frac{1}{3}III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{I+(-1)III \\ II+2III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{I+II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = (I_3, B)$$

Den første halvparten av denne matrisen er identitetsmatrisen, og den andre halvparten er $B = A^{-1}$. Vi har altså

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Du bør sjekke at dette er riktig ved å utføre multiplikasjonen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \qquad \clubsuit$$

Metoden fungerer også i det tilfellet der A ikke er inverterbar. Da vil den reduserte trappeformen til (A, I_n) ikke begynne med identitetsmatrisen I_n, og dette forteller oss at A ikke er inverterbar.

Inverse matriser i MATLAB

Dersom du har lastet inn en inverterbar matrise A i MATLAB, vil kommandoen

```
>> B=inv(A)
```

få MATLAB til å regne ut den inverse matrisen og legge den inn i variabelen B. Dersom du ønsker å løse matriseligningen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

kan du nå gjøre det ved å skrive

```
>> x=Bb
```

B*b

(dette forutsetter selvfølgelig at du allerede har lastet inn $\mathbf{b}$). Det er imidlertid mer effektivt å bruke kommandoen

```
>> x=A\b
```

Legg merke til at "brøkstreken" \ går "gal vei" — det skyldes at man her "deler fra venstre" (det vil si at man gjør noe som tilsvarer å gange med A^{-1} fra venstre). Kommandoen

```
>> x=b/A
```

med "normal" brøkstrek, produserer løsningen til ligningen $\mathbf{x}A = \mathbf{b}$ (i dette tilfellet må $\mathbf{x}$ og $\mathbf{b}$ være radvektorer for at dimensjonene skal passe) fordi vi her kan løse ligningssystemet ved å gange med A^{-1} fra høyre — dvs. vi deler fra høyre.

Vær oppmerksom på at kommandoene ovenfor bare fungerer etter beskrivelsen når A er en inverterbar, kvadratisk matrise; vil du løse andre typer ligningssystemer, må du bruke teknikkene vi har sett på tidligere i dette kapitlet. (Advarsel: Det kan hende at du får svar på kommandoen `>> x=A\b` selv om matrisen A ikke er kvadratisk, men løsningen kan da ha en annen tolkning — prøv `>> help mldivide` for mer informasjon).

(matrix left divide)

Oppgaver til seksjon 4.5

1. Finn den inverse matrisen dersom den finnes:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

2. Finn den inverse matrisen dersom den finnes:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 16 & -6 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

d) $D = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

3. Bruk MATLAB til å finne den inverse matrisen dersom den finnes:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, b) $B = \begin{pmatrix} 0.1 & 2.5 & 1.3 & 1.1 \\ 0.2 & 3.3 & 1.1 & 0.3 \\ 1.2 & -1.2 & 2.4 & -3.2 \\ -2.2 & 0.2 & -1.1 & 0.2 \end{pmatrix}$

c) $C = \begin{pmatrix} 1.1 & -2.3 & 4.3 & -0.05 & 1 \\ 3.4 & 0.7 & -1 & 3.2 & 4.1 \\ 3 & -1.2 & 4.2 & -3.3 & 0.2 \\ -2 & 2.3 & 3.1 & 1.3 & 2.2 \\ -2.3 & 3 & 2.8 & 1.2 & -1.1 \end{pmatrix}$

4. Bruk MATLAB-kommandoen `>> x=A\b` til å løse matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ når:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. Bruk MATLAB-kommandoen `>> x=b/A` til å løse matriseligningen $\mathbf{x}A = \mathbf{b}$ når:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = (-1, 2, 3)$

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = (4, -3, 0, 1)$ Sammenlign med svarene på oppgave 4.

6. a) Finn den inverse matrisen til

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Bruk resultatet i a) til å løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ y + z &= 3 \\ -2y + z &= 3 \end{aligned}$$

c) For hvilke verdier av a og b har ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ y + z &= 3 \\ -2y + (a+1)z &= b^2 - 10 \end{aligned}$$

henholdsvis én, ingen og uendelig mange løsninger?

7. Anta at A er en inverterbar $n \times n$-matrise, og at $\mathbf{b}$ er en radvektor med n komponenter. Vis at $\mathbf{x} = \mathbf{b}A^{-1}$ er den entydige løsningen til ligningen $\mathbf{x}A = \mathbf{b}$.

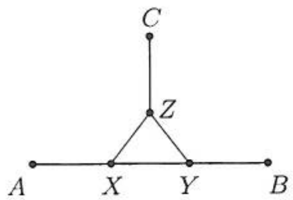
8. Anta at A er en inverterbar $n \times n$-matrise og at B er en inverterbar $m \times m$-matrise. Lag en $(n+m)\times(n+m)$–matrise C ved å sette inn A i øvre venstre hjørne, B i nedre høyre hjørne og så fylle ut med nuller. Symbolsk skriver vi:

$$C = \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{pmatrix}$$

Vis at C er inverterbar og at

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B^{-1} \end{pmatrix}$$

9. Figuren nedenfor viser et elektrisk nettverk. Man kan regulere spenningen i de ytre punktene A, B og C, men spenningen i de indre punktene X, Y og Z er alltid gjennomsnittet av spenningen i nabopunktene.



a) La a, b, c, x, y, z være spenningen i henholdsvis A, B, C, X, Y og Z. Vis at dersom

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

så er $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ der

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Finn A^{-1}.

c) Finn x, y og z når $a = 1$, $b = 2$ og $c = 3$.

d) Hvordan skal du velge de ytre spenningene a, b og c for å få $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$?

Repetér 4.2.4, 4.2.6

4.6 Lineærkombinasjoner og basiser

Anta at vi har n vektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ i $\mathbb{R}^m$. En vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ kalles en *lineærkombinasjon* av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ dersom det finnes tall $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ slik at

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b} \tag{4.6.1}$$

Vi kan tenke på dette som en ligning der $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ og $\mathbf{b}$ er gitt, og der vi ønsker å finne $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$A\vec{x} = \vec{b}$
vektor = følger utenfra
rader i A = ligninger innenfra

Def spennet Sp[...]
med en graf?

I lineær algebra er det svært viktig å vite når en vektor $\mathbf{b}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av en utgangsmengde $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, og på hvor mange måter dette kan gjøres. Det viser seg at dette bare er en ny vri på de spørsmålene vi allerede har studert i dette kapitlet. Hvis $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ er matrisen med søyler $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, observerte vi i seksjon 4.4 at

A = [a1|..|an]

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdot\cdot + \mathbf{a}_n$$

x_n

Å finne en vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

slik at $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$, er altså det samme som å løse matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Eksempel 1: Skriv

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

som en lineærkombinasjon av

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vi må altså finne tall x_1, x_2 (hvis mulig!) slik at

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Det tilsvarende ligningssystemet er

$$\begin{aligned} 3x_1 + 7x_2 &= 1 \\ -x_1 + x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

med utvidet matrise

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi radreduserer på vanlig måte

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \overset{I \leftrightarrow II}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{II+3I \\ III+2I}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{10}II}{\underset{\sim}{\frac{1}{6}III}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{III+(-1)II}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(-1)I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi går tilbake til ligningene

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= -3 \\ x_2 &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

som gir $x_2 = 1$ og $x_1 = -3 + x_2 = -2$. □

Vi legger merke til at vi hadde litt "flaks" i eksemplet ovenfor i og med at vi fikk $0 = 0$ i den siste ligningen. Det gjenspeiler at en vektor i $\mathbb{R}^3$ vanligvis ikke kan skrives som en lineærkombinasjon av to gitte vektorer — vi trenger faktisk litt flaks for å få det til! Vi skal nå se nærmere på når en vektor kan skrives som lineærkombinasjoner av andre vektorer — med eller uten "flaks".

X!

Setning 4.6.1 *Anta at* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ *er vektorer i* $\mathbb{R}^m$. *For å undersøke om* $\mathbf{b}$ *kan skrives som en lineærkombinasjon av* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, *radreduserer vi matrisen* $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ *til en trappematrise* C. *Da gjelder*

den utvidede $[A|b] = [\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\ \vec{b}]$ $[C|d]$

(i) Dersom den siste søylen i C *er en pivotsøyle, er* $\mathbf{b}$ ikke *en lineærkombinasjon av* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. $[C,d]$

Dersom den siste søylen i C ikke *er en pivotsøyle, har vi videre:* $[C|d]$

(ii) Dersom alle de andre søylene i C *er pivotsøyler, kan* $\mathbf{b}$ *skrives som en lineærkombinasjon av* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *på nøyaktig én måte.*

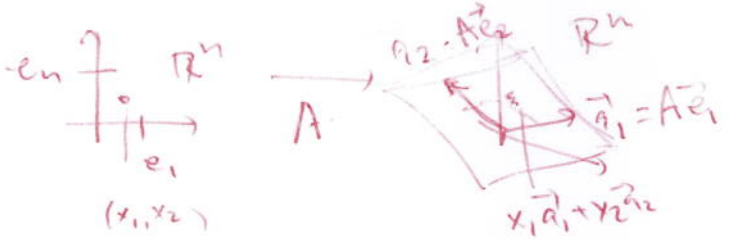
(iii) Dersom minst én av de andre søylene i C ikke *er en pivotsøyle, kan* $\mathbf{b}$ *skrives som en lineærkombinasjon av* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *på uendelig mange måter.*

Bevis: Dette er bare en omformulering av setning 4.2.4. □

Et viktig spørsmål er når *alle* vektorer $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^n$ kan skrives som en lineærkombinasjon av en gitt samling vektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$. Dette er bare en omformulering av setning 4.2.6.

$\mathbb{R}^m$ $\vec{a}_n$

Setning 4.6.2 *Anta at* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *er vektorer i* $\mathbb{R}^m$, *og at matrisen* $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ *kan radreduseres til trappematrisen* C. *Da kan enhver vektor* $\mathbf{b}$ *i* $\mathbb{R}^m$ *skrives som en lineærkombinasjon av* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *hvis og bare hvis alle radene i* C *inneholder et pivotelement.*



Bevis: Som allerede nevnt er dette bare en omskrivning av setning 4.2.6. □

Anta at vi har en samling vektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ i $\mathbb{R}^m$. Med *spennet*

$$\mathrm{Sp}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

$= \{x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$

til $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ mener vi mengden av alle vektorer $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ som kan skrives som en lineærkombinasjon av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Setning 4.6.1 forteller oss hvordan vi kan sjekke om en spesiell vektor $\mathbf{b}$ hører til $\mathrm{Sp}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$, mens setning 4.6.2 forteller oss hvordan vi kan sjekke om *alle* vektorer i $\mathbb{R}^m$ hører til $\mathrm{Sp}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$. I det siste tilfellet er $\mathrm{Sp}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) = \mathbb{R}^m$ og vi sier at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *utspenner hele* $\mathbb{R}^m$. Setningen ovenfor har en viktig konsekvens:

(likhet av mengder)

Korollar 4.6.3 *Dersom $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ utspenner hele $\mathbb{R}^m$, er $n \geq m$. det vil si at antall elementer er større enn eller lik dimensjonen til rommet.*

Bevis: La A være matrisen med $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ som søyler, og radreduser A til trappematrisen C. Dersom vektorene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ utspenner hele $\mathbb{R}^m$, må C ha et pivotelement i hver rad, og det er det bare plass til om $n \geq m$. □

Figur?

Det er ikke så vanskelig å få en viss geometrisk forståelse av korollaret i $\mathbb{R}^3$: Har du to vektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^3$, vil alle lineærkombinasjoner av $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ ligge i planet som går gjennom punktene $\mathbf{0}$, $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$. Du trenger en tredje vektor, som ikke ligger i dette planet, for å kunne skrive enhver vektor i $\mathbb{R}^3$ som en lineærkombinasjon.

Lineær uavhengighet

Vi skal være spesielt interessert i situasjoner der elementene i

$$\mathrm{Sp}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

kan skrives som lineærkombinasjoner av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ på en *entydig* måte, dvs. at det for hver $\mathbf{b} \in \mathrm{Sp}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ finnes nøyaktig ett sett av tall $x_1, x_2, \ldots, x_n$ slik at $\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$.

Definisjon 4.6.4 *Vi sier at vektorene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ er* lineært uavhengige *dersom hver $\mathbf{b} \in \mathrm{Sp}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ kan skrives som en lineærkombinasjon av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ på en entydig måte. Hvis vektorene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ ikke er lineært uavhengige, sier vi at de er* lineært avhengige.

En egenskap ved mengden $\{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$, ikke av hver enkelt $\vec{a}_j$.

Det er ofte nyttig å formulere lineær uavhengighet på en annen måte:

-e

Setning 4.6.5 *Vektorene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ er lineært uavhengig hvis og bare hvis følgende betingelse er oppfylt:*

? Tydeligere? $a_1, \ldots, a_n$ er lin. avh. hvis $\exists$ $x_1, \ldots, x_n$, og $y_1, \ldots, y_n$ slik at

$x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_n\vec{a}_n = y_1\vec{a}_1 + \ldots + y_n\vec{a}_n$, ~~men ikke alle~~

men $(x_1, \ldots, x_n) \neq (y_1, \ldots, y_n)$.

En lineærkombinasjon $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$ *av* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *er bare lik* $\mathbf{0}$ *dersom* alle *koeffisientene* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *er lik* 0.

Hvis $x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{0}$

så $x_1 = \dots = x_n = 0$

$\Updownarrow$

Hvis ~~ikke alle~~ $x_i = 0$ ~~$(x_1, \dots, x_n)$~~

$(x_1, \dots, x_n) \neq \vec{0}$

så $x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n \neq \vec{0}$..

Bevis: Anta først at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ er linært uavhengige. Vi kan opplagt skrive $\mathbf{0}$ som lineærkombinasjonen

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + \cdots + 0\mathbf{a}_n$$

Siden lineærkombinasjoner av lineært uavhengige vektorer er entydige, betyr dette at hvis

$$\mathbf{0} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n$$

så er $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$.

Anta så at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *ikke* er linært uavhengige. Da må det finnes en vektor $\mathbf{b}$ som kan skrives som en lineærkombinasjon på to forskjellige måter:

$$\mathbf{b} = y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \cdots + y_n\mathbf{a}_n$$

$$\mathbf{b} = z_1\mathbf{a}_1 + z_2\mathbf{a}_2 + \cdots + z_n\mathbf{a}_n$$

Trekker vi disse to ligningene fra hverandre, får vi

$$\mathbf{0} = (y_1 - z_1)\mathbf{a}_1 + (y_2 - z_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (y_n - z_n)\mathbf{a}_n$$

Velger vi $x_1 = y_1 - z_1, x_2 = y_2 - z_2, \ldots, x_n = y_n - z_n$, må minst én av disse x_i-ene være forskjellig fra 0 (siden de to lineærkombinasjonene ovenfor er forskjellige), og vi ser dermed at

$$\mathbf{0} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n$$

er oppfylt uten at alle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er lik null . $\square$

Våre gamle resultater kan nå brukes til å sjekke om vektorer er lineært uavhengige:

Setning 4.6.6 *Anta at* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *er vektorer i* $\mathbb{R}^m$, *og at matrisen* $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ *kan radreduseres til trappematrisen* C. *Da er* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *lineært uavhengige hvis og bare hvis alle søylene i* C *er pivotsøyler.* ..JU

Bevis: Fra forrige setning vet vi at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ er lineært uavhengige hvis og bare hvis ligningen

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \tag{4.6.2}$$

har en entydig løsning $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Den utvidede matrisen til denne ligningen er $(A, \mathbf{0}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{0})$, og radreduserer vi denne matrisen til trappeform, vil den siste søylen fortsatt bestå av nuller, mens resten av matrisen vil være lik C. Vi ser dermed at (4.6.2) har en entydig

$[A\ \vec{0}] = [\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n\ \vec{0}]$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

løsning hvis og bare hvis alle søylene i C er pivotsøyler. □

Eksempel 2: Vi skal undersøke om vektorene

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ og } \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Søylene i

er lineært uavhengige. Først organiserer vi vektorene som en matrise

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Putter vi denne inn i MATLAB og kjører `rref`, ser vi at den reduserte trappeformen til A er

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Siden denne matrisen bare har pivotsøyler, er vektorene våre lineært uavhengige. ♣

Før vi går videre, tar vi med en viktig konsekvens av setningen ovenfor.

Korollar 4.6.7 *En lineært uavhengig mengde i $\mathbb{R}^m$ har m eller færre elementer. Antall elementer er altså mindre enn eller lik dimensjonen til rommet.*

Bevis: Anta at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ er vektorer i $\mathbb{R}^m$, og la A være matrisen med disse vektorene som søyler. Reduser A til en trappematrise C. Skal vektorene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ være lineært uavhengige, må C ha et pivotelement i hver søyle, og det er det bare plass til hvis $n \leq m$. □

Bemerkning: Legg merke til at ulikheten i korollaret ovenfor går motsatt vei av ulikheten i korollar 4.6.3: For å utspenne hele $\mathbb{R}^m$ trenger vi *minst* m vektorer, men for å ha lineær uavhengighet kan vi *maksimalt* ha m vektorer. En mengde vektorer som både er lineært uavhengig og utspenner hele $\mathbb{R}^m$ må derfor ha nøyaktig m elementer. Denne observasjonen ligger bak det viktige begrepet *basis* som vi snart skal se nærmere på.

Basis

Anta nå at vi har en samling vektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ som utspenner $\mathrm{Sp}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$. Vektorene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ vil vanligvis ikke være lineært uavhengige, og for noen formål er det en stor ulempe. Det neste resultatet viser at det alltid er mulig å plukke ut *noen* av vektorene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ slik at vi får en lineært uavhengig mengde som utspenner hele $\text{Sp}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$.

Setning 4.6.8 *Anta at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ er en samling ikke-null vektorer i $\mathbb{R}^m$. Da er det mulig å finne en lineært uavhengig delmengde $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \ldots, \mathbf{a}_{i_k}$ av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ slik at*

$$\text{Sp}(\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \ldots, \mathbf{a}_{i_k}) = \text{Sp}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

Bevis: Vi organiserer først de opprinnelige vektorene som en matrise $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ og radreduserer denne til vi får en matrise C på trappeform. Vi fjerner så de søylene i C som *ikke* er pivotsøyler, og står da igjen med en matrise C' der alle søylene er pivotsøyler. Vi går tilbake til A og fjerner de samme søylene der som vi fjernet i C. Dette gir oss en matrise A' som inneholder noen av søylene i A. Vi ser at vi kan radredusere A' til C' ved å bruke de samme radoperasjonene som reduserte A til C. Dette betyr at A' er radekvivalent med en trappematrise med bare pivotsøyler, og følgelig er søylene i A' lineært uavhengige.

For å fullføre beviset må vi vise at enhver vektor $\mathbf{b}$ som er en lineærkombinasjon av søylene i A, også er en lineærkombinasjon av søylene i A'. Hvis vi radreduserer den utvidede matrisen $(A, \mathbf{b})$ ved å bruke de samme operasjonene som ovenfor, vet vi fra setning 4.6.1 at den siste søylen *ikke* er en pivotsøyle. Dersom vi isteden radreduserer $(A', \mathbf{b})$ ved å bruke de samme operasjonene, vil heller ikke nå den siste søylen være en pivotsøyle (det skyldes at vi ikke "mister" noen pivotelementer når vi bytter ut A med A'). Ifølge setning 4.6.1 er da $\mathbf{b}$ en lineærkombinasjon av søylene i A'. □

La pivotsøylene være $1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n$

$Sp(a_{j_1}, \ldots, a_{j_k})$ ✓

$\supseteq ?$ $\subseteq Sp(a_1, \ldots, a_n)$

$[A|b] \sim [C|d]$

$\cup \qquad \cup$

$[A'|b] \sim [C'|d]$

$\supseteq ?$

Legg merke til at beviset ovenfor inneholder en metode for hvordan man finner de lineært uavhengige elementene $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \ldots, \mathbf{a}_{i_k}$; man organiserer de opprinnelige vektorene som en matrise A, radreduserer denne til trappeform, og plukker ut de søylene i A som korresponderer til pivotsøyler i trappeformen.

Eksempel 3: La

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vi skal finne en lineært uavhengig delmengde som utspenner $\text{Sp}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$. Bruker vi MATLAB, får vi

```
A=[1 -2 3 4
2 0 2 -1
-1 2 -3 0
-1 1 -2 2
0 3 -3 2];

>>C=rref(B)

C =

    1    0    1    0
    0    1   -1    0
    0    0    0    1
    0    0    0    0
    0    0    0    0
```

Vi ser at den første, andre og fjerde søylen er pivotsøyler. Mengden vi er på jakt etter er da de tilsvarende søylene i A, nemlig

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

□

Basiser

Basis er kanskje det viktigste begrepet i lineær algebra. Basiser brukes til så mangt, men i dette kapitlet skal vi hovedsakelig benytte dem til å studere egenverdier og egenvektorer. Før vi kommer så langt, trenger vi en kort innføring i noen grunnleggende egenskaper. Vi begynner med definisjonen:

Definisjon 4.6.9 *En basis for* $\mathbb{R}^m$ *er en lineært uavhengig mengde vektorer* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *som utspenner hele* $\mathbb{R}^m$*, dvs. at* $\mathrm{Sp}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) = \mathbb{R}^m$.

Det er lett å se at enhver basis for $\mathbb{R}^m$ må ha nøyaktig m elementer — korollar 4.6.3 forteller oss nemlig at en mengde som utspenner hele $\mathbb{R}^m$ må ha minst m elementer, mens korollar 4.6.7 forteller oss at ingen lineært uavhengig mengde i $\mathbb{R}^m$ kan ha flere enn m elementer.

Den enkleste basisen er den som består av enhetsvektorene

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dette kalles ofte *standardbasisen* i $\mathbb{R}^m$.

La A være matrisen med vektorene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^m$ som søyler. Da er $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}$ en basis for $\mathbb{R}^m$ hvis og bare hvis matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en entydig løsning for alle $\mathbf{b}$ — vektoren

ikke fet
2,...,m

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

er nemlig en løsning av matriseligningen hvis og bare hvis

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_m\mathbf{a}_m = \mathbf{b}$$

Det neste resultatet gjør det lett å sjekke om en samling vektorer er en basis.

ikke fet
2,...,m

Setning 4.6.10 *Anta at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ er vektorer i $\mathbb{R}^m$, og la A være $m \times m$-matrisen med disse vektorene som søyler. Da er $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ en basis for $\mathbb{R}^m$ hvis og bare hvis A er radekvivalent med identitetsmatrisen I_m.*

Bevis: Vi har allerede observert at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ er en basis hvis og bare hvis matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en entydig løsning for alle $\mathbf{b}$. Ifølge setning 4.4.2 er dette ekvivalent med at A er radekvivalent med I_m. □

Setningen ovenfor har noen konsekvenser som ofte er nyttige i mer teoretisk arbeid. Det neste korollaret sier at dersom vi har "riktig antall" vektorer (dvs. m vektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ i $\mathbb{R}^m$) og skal sjekke om de danner en basis, så er det nok å sjekke ett av de to kravene om at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ er lineært uavhengige og utspenner hele $\mathbb{R}^m$ — det andre kravet er automatisk oppfylt.

Korollar 4.6.11 *Anta at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ er m vektorer i $\mathbb{R}^m$. Dersom vektorene enten er lineært uavhengige, eller utspenner hele $\mathbb{R}^m$, så danner de en basis.*

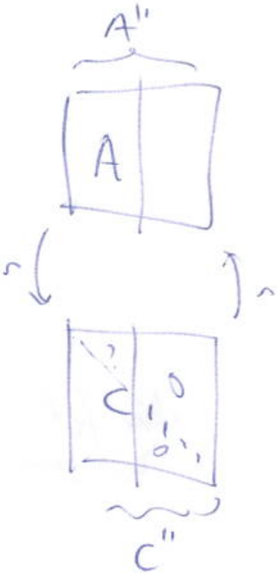
Bevis: La A være matrisen med $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ som søyler, og la D være den reduserte trappeformen til A. Dersom vektorene er lineært uavhengige, er alle søylene i D pivotsøyler. Siden D er kvadratisk, er det bare plass til dette om alle pivotelementene står på diagonalen, dvs. hvis $D = I_m$. Men da er $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ en basis ifølge setningen ovenfor.

Dersom vektorene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ utspenner hele $\mathbb{R}^m$ må alle rader i D inneholder pivotelementer. Siden D er kvadratisk er det bare plass til dette om alle pivotelementene står på diagonalen. Men dermed er $D = I_m$ og $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ en basis ifølge setningen ovenfor. □

(er)

Det neste resultatet gjør det enda lettere å finne basiser — det forteller oss at enhver lineært uavhengig mengde kan utvides til en basis:

Setning 4.6.12 *Anta at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ er en lineært uavhengig mengde av vektorer i $\mathbb{R}^m$. Da finnes det vektorer $\mathbf{a}_{n+1}$, $\mathbf{a}_{n+2}$, $\ldots$, $\mathbf{a}_m$ slik at $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\ldots$, $\mathbf{a}_n$, $\mathbf{a}_{n+1}$, $\ldots$, $\mathbf{a}_m$ er en basis for $\mathbb{R}^m$.*



Bevis: La A være matrisen med $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ som søyler, og radreduser A til en trappematrise C. Siden vektorene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ er lineært uavhengige, er alle søyler i C pivotsøyler. Det betyr at pivotelementene starter øverst i venstre hjørne av matrisen og fortsetter nedover diagonalen inntil de treffer høyre kant av matrisen. Utvid C til en kvadratisk matrise C' ved å skjøte på flere søyler med pivotelementer på diagonalen. Reverser de radoperasjonene som forvandlet A til C, og bruk dem til å forvandle C' til en matrise A'. Da er A' en utvidelse av A (det er kommet til nye søyler bakerst), og søylene i A' er lineært uavhengige siden A' er radekvivalent med en matrise C' som bare har pivotsøyler. □

Beviset ovenfor blir lettere å forstå hvis vi gjennomfører prosedyren på et eksempel:

Eksempel 4: Vi skal utvide mengden

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

til en basis for $\mathbb{R}^4$. Vi begynner med å radredusere matrisen som har $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ som søyler:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{II+(-3)I}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{III+2I}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{IV+I}{\sim}$$

$$\overset{IV+I}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \overset{III+\frac{2}{5}II}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \overset{IV+II}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = C$$

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 7 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vi har nå fått matrisen på så god trappeform som vi trenger (for å få skikkelig trappeform bør vi gjøre om "pivotelementene" -1 og -5 til 1'ere, men det fører bare til dobbeltarbeid i dette tilfellet). Nest skritt er å skjøte på C slik at vi får en diagonalmatrise med pivotelementer på diagonalen:

$$C' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Til slutt bruker vi radoperasjonene ovenfor baklengs:

$$C' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{IV-II}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III-\frac{2}{5}II}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{IV-I}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III-2I}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{II+3I}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A'$$

Dette viser at

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

er en basis. ♣

4.6.8 siste: Enhver mengde som utspenner $\mathbb{R}^m$ inneholder en basis.

Bemerkning: Det kan virke på eksemplet ovenfor som om den siste delen av prosessen (nemlig å gå tilbake fra C' til A') er unødvendig siden de siste to søylene ikke endrer seg. Dette skyldes at vi ikke har noe radombytte blant operasjonene våre — med en gang et slikt ombytte dukker opp, risikerer vi å måtte gjøre endringer i de siste to søylene. La oss legge til at det er mange andre metoder man kan bruke for å utvide en lineært uavhengig mengde til en basis, og at metoden ovenfor slett ikke er den raskeste.

Basiser og lineæravbildninger

Det er ikke så lett å se på dette stadiet hvorfor basiser er så viktige, men vi skal prøve å antyde det. Den aller viktigste grunnen er at basiser spiller en sentral rolle når man skal studere lineæravbildninger. Husk (fra seksjon 1.9) at en lineæravbildning fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ er en funksjon $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ som tilfredsstiller kravene:

(i) $\mathbf{T}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{T}(\mathbf{x})$ for alle $c \in \mathbb{R}$ og alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

(ii) $\mathbf{T}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{T}(\mathbf{y})$ for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

Ifølge setning 1.9.2 medfører disse kravene at

$$\mathbf{T}(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k) = c_1\mathbf{T}(\mathbf{x}_1) + c_2\mathbf{T}(\mathbf{x}_2) + \cdots + c_k\mathbf{T}(\mathbf{x}_k)$$

for alle $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ og alle $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$.

Anta nå at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ er en basis for $\mathbb{R}^n$, og at $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en lineæravbildning. Anta også at vi kjenner hvordan $\mathbf{T}$ virker på basisvektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, la oss si at $\mathbf{T}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $\mathbf{T}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$, ..., $\mathbf{T}(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$. Siden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ er en basis, kan en hvilket som helst vektor $\mathbf{x}$ skrives som en lineærkombinasjon

Bruker bare at $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ utspenner $\mathbb{R}^n$.

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Bruker vi $\mathbf{T}$ på dette uttrykket, får vi

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) =$$

$$c_1\mathbf{T}(\mathbf{v}_1) + c_2\mathbf{T}(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_n\mathbf{T}(\mathbf{v}_n) = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n$$

Dette betyr at dersom vi vet hvordan $\mathbf{T}$ virker på elementene i en basis, så vet vi også hvordan den virker på alle andre vektorer.

Vi kan snu problemstillingen ovenfor på hodet. Anta at vi ikke har en lineæravbildning $\mathbf{T}$, men at vi ønsker å *definere* er lineæravbildning $\mathbf{T}$ slik at $\mathbf{T}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $\mathbf{T}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$, ..., $\mathbf{T}(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$ (dette er en meget vanlig problemstilling i lineær algebra). Den neste setningen forteller oss at dette alltid er mulig:

Setning 4.6.13 *Anta at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ er en basis for $\mathbb{R}^n$, og at $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$, ..., $\mathbf{w}_n$ er vektorer i $\mathbb{R}^m$. Da finnes det nøyaktig én lineæravbildning $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ slik at $\mathbf{T}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $\mathbf{T}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$, ..., $\mathbf{T}(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$.*

Bevis: Argumentet ovenfor viser at det kan være høyst én slik lineæravbildning. For å vise at det virkelig finnes en, bruker vi at siden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ er en basis, kan enhver vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ skrives som en lineærkombinasjon

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$$

på nøyaktig én måte. Vi kan derfor *definere* en funksjon $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ved

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\mathbf{w}_n$$

Siden vi åpenbart har $\mathbf{T}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $\mathbf{T}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{T}(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$, er det nok å vise at $\mathbf{T}$ er en lineæravbildning, dvs. at den tilfredsstiller betingelsene (i) og (ii) ovenfor.

For å vise (i), observerer vi at hvis

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$$

så er

$$c\mathbf{x} = cx_1\mathbf{v}_1 + cx_2\mathbf{v}_2 + \cdots + cx_n\mathbf{v}_n$$

Dermed er

$$\mathbf{T}(c\mathbf{x}) = cx_1\mathbf{w}_1 + cx_2\mathbf{w}_2 + \cdots + cx_n\mathbf{w}_n$$

På den annen side er

$$\begin{aligned} c\mathbf{T}(\mathbf{x}) &= c(x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\mathbf{w}_n) = \\ &= cx_1\mathbf{w}_1 + cx_2\mathbf{w}_2 + \cdots + cx_n\mathbf{w}_n \end{aligned}$$

Dette viser at $\mathbf{T}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{T}(\mathbf{x})$, så betingelse (i) er oppfylt.

For å vise at betingelse (ii) er oppfylt, begynner vi med to vektorer

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$$

$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2 + \cdots + y_n\mathbf{v}_n$$

Da er

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n) + (y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2 + \cdots + y_n\mathbf{v}_n) = \\ &= (x_1 + y_1)\mathbf{v}_1 + (x_2 + y_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (x_n + y_n)\mathbf{v}_n \end{aligned}$$

og følgelig

$$\mathbf{T}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (x_1 + y_1)\mathbf{w}_1 + (x_2 + y_2)\mathbf{w}_2 + \ldots + (x_n + y_n)\mathbf{w}_n$$

På den annen side er

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\mathbf{w}_n$$

og

$$\mathbf{T}(\mathbf{y}) = y_1\mathbf{w}_1 + y_2\mathbf{w}_2 + \cdots + y_n\mathbf{w}_n$$

Det betyr at $\mathbf{T}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{T}(\mathbf{y})$, og følgelig er betingelse (ii) oppfylt. □

Man kan lure på hvorfor det er bruk for andre basiser i $\mathbb{R}^n$ enn standardbasisen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Svaret er ganske enkelt at i mange eksempler gir andre basiser enklere regninger og mer informative svar — spesielt gjelder dette basiser som består av egenvektorer for den lineæravbildningen vi studerer. Husk at en *egenvektor* for en lineæravbildning $\mathbf{T}$ er en vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$

slik at $\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ for et eller annet tall λ (λ kalles *egenverdien* til $\mathbf{v}$). Egenvektorer er spesielt nyttige når vi skal studere gjentatt bruk av avbildningen $\mathbf{T}$ siden $\mathbf{T}^k(\mathbf{v}) = \lambda^k\mathbf{v}$.

Anta nå at vi har en basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ av egenvektorer for $\mathbf{T}$ med egenverdier λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n. Enhver vektor $\mathbf{x}$ kan skrives som en lineærkombinasjon

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

Bruker vi $\mathbf{T}^k$ på dette uttrykket, får vi

$$\mathbf{T}^k(\mathbf{x}) = c_1\lambda_1^k\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^k\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\lambda_n^k\mathbf{v}_n$$

$|c_1\lambda_1^k\vec{v}_1|$ relativt stor i f.t. $|c_2\lambda_2^k\vec{v}_2|, \ldots, |c_n\lambda_n^k\vec{v}_n|$

Dersom en av egenverdiene (la oss si λ_1) er større enn de andre i tallverdi, vil leddet den tilhører dominere over de andre når n blir stor. Det betyr at størrelsesordenen til $\mathbf{T}^k(\mathbf{x})$ vokser som λ_1^k, og at fordelingen mellom komponentene i vektoren $\mathbf{T}^k(\mathbf{x})$ blir mer og mer som fordelingen mellom komponentene i $\mathbf{v}_1$. Som vi skal se senere, er informasjon av denne typen uhyre viktige når man skal studere systemer som utvikler seg med tiden.

Det viser seg at de fleste (men ikke alle!) lineæravbildninger har en basis av egenvektorer. Senere i dette kapitlet skal vi lære mer om hvordan vi kan finne egenverdier og egenvektorer.

Oppgaver til seksjon 4.6

1. Skriv $\mathbf{b}$ som en lineærkombinasjon av $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ når $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Skriv $\mathbf{b}$ som en lineærkombinasjon av $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ og $\mathbf{a}_3$ når $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Avgjør om alle vektorer i $\mathbb{R}^n$ (for relevant n) kan skrives som en lineærkombinasjon av vektorene:

a) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

c) $\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$.

4. Skriv $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ som en lineærkombinasjon av $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bruk gjerne MATLAB som hjelpemiddel.

5. Bruk MATLAB til å skrive $\begin{pmatrix} 1 \\ .25 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ som en lineærkombinasjon av $\begin{pmatrix} 0.75 \\ 0.3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$ $\begin{pmatrix} 4 \\ 0.1 \\ -2 \\ 0.25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \\ 0.2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$

6. Bruk MATLAB til å sjekke om enhver vektor i $\mathbb{R}^4$ kan skrives som en lineærkombinasjon av $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

7. Avgjør om vektorene er lineært uavhengige:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

8. Finn en lineært uavhengig delmengde:

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

9. Avgjør om mengden er en basis for det relevante rommet $\mathbb{R}^n$ (i noen av tilfellene lønner det seg å tenke før man regner!)

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

10. Utvid mengden av vektorer til en basis for det relevante rommet $\mathbb{R}^n$:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

11. I denne oppgaven er $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

a) Vis at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ danner en basis for $\mathbb{R}^2$.

b) Skriv $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ som lineærkombinasjoner av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$.

c) Forklar hvorfor det finnes nøyaktig én lineæravbildning $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ slik at $\mathbf{T}(\mathbf{v}_1) = 2\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{T}(\mathbf{v}_2) = -\mathbf{v}_2$.

d) Finn matrisen A til lineæravbildningen $\mathbf{T}$ (dvs. 2×2-matrisen A slik at $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$)

12. Anta at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ er en mengde av ikke-null vektorer som står normalt på hverandre. Vis at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ er lineært uavhengige. (*Hint:* Anta at $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ og ta skalarproduktet med $\mathbf{v}_i$ på begge sider.)