4.7 Underrom

I denne seksjonen skal vi utvide, generalisere og systematisere teorien fra forrige seksjon. Resultatene vi skal komme frem til, er svært viktige i videregående lineær algebra, men ved første møte kan de virke vanskelige og uvante. Det kan derfor være en trøst å vite at med unntak av seksjon 4.12 (som hovedsakelig er for spesielt interesserte), har vi ikke bruk for disse resultatene i resten av kapitlet.

Det sentrale begrepet i denne seksjonen er "underrom". Litt kjapt og upresist kan vi si at underrom er delmengder av $\mathbb{R}^n$ som oppfører seg som $\mathbb{R}^m$ for en $m < n$. Et enkelt eksempel er mengden av alle vektorer med formen $(x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ i $\mathbb{R}^n$ — denne mengden er åpenbart en kopi av $\mathbb{R}^m$ inni $\mathbb{R}^n$. Vi skal se at det faktisk er mange slike kopier av $\mathbb{R}^m$ inni $\mathbb{R}^n$.

Den grunnleggende definisjonen kan virke ganske abstrakt, men som vi snart skal se, er disse objektene ikke så merkelige som de kan se ut til ved første øyekast.

Definisjon 4.7.1 *En ikke-tom mengde H av vektorer i $\mathbb{R}^n$ kalles et* underrom *av $\mathbb{R}^n$ dersom følgende betingelser er oppfylt.*

a) Dersom $\mathbf{u} \in H$, så er $c\mathbf{u} \in H$ for alle tall $c \in \mathbb{R}$.

b) Dersom $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$, så er $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$.

Bemerkning: Vi sier at H er *lukket under addisjon* (betingelse b)) *og multiplikasjon med skalar* (betingelse a)).

Det minste underrommet til $\mathbb{R}^n$ er $H = \{\mathbf{0}\}$ (mengden som bare består av nullvektoren $\mathbf{0}$) og det største er $H = \mathbb{R}^n$. De viktigste eksemplene er de som ligger mellom disse ytterpunktene. Her er en klasse underrom vi kjenner fra før:

Eksempel 1: Husk (fra forrige seksjon) at dersom $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ er vektorer i $\mathbb{R}^n$, så består *spennet* $\mathrm{Sp}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m)$ av alle lineærkombinasjoner

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m$$

Vi skal vise at $H = \mathrm{Sp}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m)$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$.

For å sjekke at betingelse a) er oppfylt, må vi vise at dersom $\mathbf{u} \in H$ og $c \in \mathbb{R}$, så er $c\mathbf{u} \in H$. Siden $\mathbf{u} \in H$, er $\mathbf{u}$ en lineærkombinasjon

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m$$

Dermed er

$$c\mathbf{u} = cc_1\mathbf{a}_1 + cc_2\mathbf{a}_2 + \cdots + cc_m\mathbf{a}_m$$

som er en lineærkombinasjon av $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots$, $\mathbf{a}_m$, og følgelig er $c\mathbf{u} \in H$.

For å sjekke at betingelse b) er oppfylt, må vi vise at dersom $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$, så er $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$. Siden $\mathbf{u} \in H$, er $\mathbf{u}$ en lineærkombinasjon

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m$$

og siden $\mathbf{v} \in H$, er $\mathbf{v}$ en lineærkombinasjon

$$\mathbf{v} = d_1\mathbf{a}_1 + d_2\mathbf{a}_2 + \cdots + d_m\mathbf{a}_m$$

Dermed er

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (c_1 + d_1)\mathbf{a}_1 + (c_2 + d_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (c_m + d_m)\mathbf{a}_m$$

en lineærkombinasjon av $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots$, $\mathbf{a}_m$, og følgelig er $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$. ♣

Vi skal snart se at *alle* underrom av H (unntatt det trivielle underrommet $\{\mathbf{0}\}$) er på formen $\mathrm{Sp}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m)$ for et passende valg av $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_2, \ldots$, $\mathbf{a}_m$. I utgangspunktet kan de imidlertid se ganske annerledes ut:

Eksempel 2: La $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Vi skal vise at

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 0\}$$

er et underrom av $\mathbb{R}^n$. H består altså av alle vektorene som står ortogonalt (normalt) på $\mathbf{a}$. Dersom $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, kalles H *det ortogonale komplementet til* $\mathbf{a}$ (dersom $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, er $H = \mathbb{R}^n$).

For å vise at H er et underrom av $\mathbb{R}^n$, må vi sjekke at betingelse a) og b) i definisjon 4.7.1 er oppfylt. For å vise at a) er oppfylt antar vi at $\mathbf{u} \in H$ og at $c \in \mathbb{R}$, og må vise at $c\mathbf{u} \in H$. Siden $\mathbf{u} \in H$, er $\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0$. Dermed er $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{a} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}) = c0 = 0$, og følgelig er $c\mathbf{u} \in H$.

For å vise at b) er oppfylt, antar vi at $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$, og må vise at $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in H$. Siden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$, er $\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0$ og $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$. Dermed er $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0 + 0 = 0$, og følgelig er $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$. ♣

Vi trenger en liten hjelpesetning før vi går videre:

Lemma 4.7.2 *Anta at H er et underrom av $\mathbb{R}^n$ og at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m \in H$. Da er*

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m \in H$$

for alle $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$

Bevis: Ifølge punkt a) i definisjon 4.7.1 er $c_1\mathbf{a}_1$, $c_2\mathbf{a}_2$, $\ldots$, $c_m\mathbf{a}_m \in H$. Ifølge punkt b) er dermed $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 \in H$. Bruker vi punkt b) en gang til, ser vi at $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = (c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2) + c_3\mathbf{a}_3 \in H$. Fortsetter vi på denne måten, får vi til slutt at $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m \in H$ (bruk gjerne induksjon til å føre et formelt bevis!) □

Her kommer resultatet vi annonserte tidligere:

Setning 4.7.3 *Anta at $H \neq \{\mathbf{0}\}$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$. Da finnes det en lineært uavhengig mengde vektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ slik at $H = \mathrm{Sp}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m)$.*

Bevis: La m være det største antall lineært uavhengige vektorer man kan finne i H, og la $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m \in H$ være en maksimal mengde av lineært uavhengige elementer (vi vet at $m \leq n$ siden det ikke er mulig å finne mer enn n lineært uavhengige elementer i hele $\mathbb{R}^n$). Vi skal vise at $H = \mathrm{Sp}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m)$.

Fra lemmaet ovenfor vet vi at $\mathrm{Sp}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m) \subset H$, så alt vi behøver å vise er at enhver $\mathbf{b} \in H$ faktisk ligger i $\mathrm{Sp}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m)$, dvs. at $\mathbf{b}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$.

Dette er ikke så vanskelig: Siden $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ er en maksimal lineært uavhengig mengde, vet vi at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}$ er lineært avhengige, og følgelig finnes det tall $c_1, c_2, \ldots, c_n, d$ som ikke alle er 0, slik at

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m + d\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Vi ser at d ikke kan være 0 for da hadde vi hatt en lineær avhengighet mellom $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$. Men dermed kan vi dele på d og få

$$\mathbf{b} = (-d^{-1}c_1)\mathbf{a}_1 + (-d^{-1}c_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (-d^{-1}c_m)\mathbf{a}_m$$

Dette viser at $\mathbf{b}$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$. □

Vi kan nå generalisere basisbegrepet til underrom:

Definisjon 4.7.4 *Anta at H er et underrom av $\mathbb{R}^n$. En lineært uavhengig mengde $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ slik at $H = \mathrm{Sp}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m)$ kalles en* basis *for H.*

Setningen ovenfor viser at et underrom alltid har en basis. Den neste setningen forteller oss at alle basiser for H har like mange elementer.

Setning 4.7.5 *Anta H er et underrom av $\mathbb{R}^n$. Da har alle basiser for H like mange elementer.*

Bevis: Anta for motsigelse at det finnes to basiser $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_m$ og $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$,..., $\mathbf{b}_k$ for H med et ulikt antall elementer, la oss si $k > m$. Siden $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ ligger i $H = \mathrm{Sp}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m)$, kan $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ skrives som lineærkombinasjoner av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$. Det finnes altså tall c_{ij} slik at

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{b}_1 & = & c_{11}\mathbf{a}_1 + c_{12}\mathbf{a}_2 + \cdots + c_{1m}\mathbf{a}_m \\
\mathbf{b}_2 & = & c_{21}\mathbf{a}_1 + c_{22}\mathbf{a}_2 + \cdots + c_{2m}\mathbf{a}_m \\
\vdots & \vdots & \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad\quad \vdots \\
\mathbf{b}_k & = & c_{k1}\mathbf{a}_1 + c_{k2}\mathbf{a}_2 + \cdots + c_{km}\mathbf{a}_m
\end{array}$$

Vektorene

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ \vdots \\ c_{1m} \end{pmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} c_{21} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{2m} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{c}_k = \begin{pmatrix} c_{k1} \\ c_{k2} \\ \vdots \\ c_{km} \end{pmatrix}$$

må være lineært avhengige siden $k > m$. Det finnes altså tall $x_1, x_2, \ldots, x_k$ som ikke alle er 0, slik at

$$x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_k\mathbf{c}_k = \mathbf{0}$$

Skriver vi ut dette uttrykket, ser vi at

$$\begin{pmatrix} x_1c_{11} + x_2c_{21} + \cdots + x_kc_{k1} \\ x_1c_{12} + x_2c_{22} + \cdots + x_kc_{k2} \\ \vdots \\ x_1c_{1m} + x_2c_{2m} + \cdots + x_kc_{km} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Men dermed er

$$\begin{aligned}
& x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \cdots + x_k\mathbf{b}_k = \\
= \quad & x_1(c_{11}\mathbf{a}_1 + c_{12}\mathbf{a}_2 + \cdots + c_{1m}\mathbf{a}_m) \\
& +x_2(c_{21}\mathbf{a}_1 + c_{22}\mathbf{a}_2 + \cdots + c_{2m}\mathbf{a}_m) \\
& \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
& +x_k(c_{k1}\mathbf{a}_1 + c_{k2}\mathbf{a}_2 + \cdots + c_{km}\mathbf{a}_m) = \\
= \quad & (x_1c_{11} + x_2c_{21} + \cdots + x_kc_{k1})\mathbf{a}_1 + \\
& +(x_1c_{12} + x_2c_{22} + \cdots + x_kc_{k2})\mathbf{a}_2 + \\
& \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
& +(x_1c_{1m} + x_2c_{2m} + \cdots + x_kc_{km})\mathbf{a}_m = \\
= \quad & 0\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + \cdots + 0\mathbf{a}_m = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Dette er en selvmotsigelse siden $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ er lineært uavhengige. Eneste mulige konklusjon er at alle basiser for H har like mange elementer. □

Vi vet fra før at alle basiser for det n-dimensjonale rommet $\mathbb{R}^n$ har nøyaktig n elementer. Det er derfor naturlig å utvide dimensjonsbegrepet til underrom på denne måten:

Definisjon 4.7.6 *La $H \neq \{0\}$ være et underrom av $\mathbb{R}^n$. Med* dimensjonen *til H mener vi antall elementer i en basis for H. Dimensjonen til H betegnes med* $\dim(H)$.

Rangen til en matrise

Det er to typer underrom som dukker opp naturlig når vi studerer en $m \times n$-matrise A. *Søylerommet* til A er underrommet av $\mathbb{R}^m$ utspent av søylene i A, men *radrommet* til A er underrommet av $\mathbb{R}^n$ utspent av radene i A. Vi skal nå studere dimensjonen til disse rommene. Det viser seg at vi allerede har full kontroll over søylerommet.

Setning 4.7.7 *Anta at A er en $m \times n$-matrise. Da er dimensjonen til søylerommet til A lik antall pivotsøyler i trappeformen til A.*

Bevis: Dette følger fra beviset for setning 4.6.8 (se også teksten rett etter slutten av beviset). □

For å bestemme dimensjonen til radrommet trenger vi en liten observasjon.

Lemma 4.7.8 *Anta at A' fremkommer når vi gjør en radoperasjon på A. Da har A og A' samme radrom.*

Bevis: Det er lett å se at dersom vi bytter om to rader eller ganger en rad med et tall $s \neq 0$, så endrer ikke radrommet seg. Vi ser derfor på tilfellet der A' fremkommer fra A ved at vi bytter ut den i-te raden $\mathbf{a}_i$ med $\mathbf{a}_i + s\mathbf{a}_j$ der $\mathbf{a}_j$ er den j-te raden. Anta først at $\mathbf{b}$ er i radrommet til A. Da finnes det tall $c_1, \dots, c_i, \dots, c_j, \dots, c_m$ slik at

$$\mathbf{b} = c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_i\mathbf{a}_i + \dots + c_j\mathbf{a}_j + \dots + c_m\mathbf{a}_m$$

Men da er

$$\mathbf{b} = c_1\mathbf{a}_1 + \dots + c_i(\mathbf{a}_i + s\mathbf{a}_j) + \dots + (c_j - c_i s)\mathbf{a}_j + \dots + c_m\mathbf{a}_m$$

som viser at $\mathbf{b}$ er i radrommet til A'. Anta så omvendt at $\mathbf{b}$ ligger i radrommet til A', dvs. at

$$\mathbf{b} = d_1\mathbf{a}_1 + \dots + d_i(\mathbf{a}_i + s\mathbf{a}_j) + \dots + d_j\mathbf{a}_j + \dots + d_m\mathbf{a}_m$$

for passende tall $d_1, \dots, d_m$. Da er

$$\mathbf{b} = d_1\mathbf{a}_1 + \dots + d_i\mathbf{a}_i + \dots + (d_j + d_i s)\mathbf{a}_j + \dots + d_m\mathbf{a}_m$$

som viser at $\mathbf{b}$ er i radrommet til A. □

Vi kan nå bevise et nyttig teorem — det sier at i en matrise kan vi alltid finne like mange lineært uavhengige rader som vi kan finne lineært uavhengige søyler. Vi skal få bruk for dette resultatet når vi studerer Lagrange-multiplikatorer i neste kapittel.

Teorem 4.7.9 (Rangteoremet) *Dimensjonen til søylerommet til en matrise er lik dimensjonen til radrommet.*

Bevis: Vi har allerede sett at dimensjonen til søylerommet er lik antall pivotsøyler (la oss si dette er k), så vi må vise at radrommet også har dimensjon k. La A' være den reduserte trappeformen til A. Siden A' fremkommer fra A ved en sekvens av radoperasjoner, vet vi fra lemmaet ovenfor at A og A' har samme radrom, så alt vi trenger å vise er at radrommet til A' har dimensjon k. Siden det et er k pivotelementer, harA' bare k ikke-null rader, så det holder å vise at disse er lineært uavhengige. Dette er enkelt.: Siden A' er på redusert trappeform, er pivotelementene de eneste ikke-null elementene i sin søyle. Dette betyr at hvis en lineærkombinasjon av "pivotradene" skal være null, må hver koeffisient være null. □

Med *rangen* til en matrise mener vi dimensjonen til søylerommet (eller, om man vil, dimensjonen til radrommet). For å finne rangen, skriver vi matrisen på trappeform og teller opp antall pivotelementer. Er matrisen stor, er dette mye arbeid, og det kan være lurt å få MATLAB til å gjøre jobben for oss. Har du lastet inn en matrise A, vil kommandoen

```
>> rank(A)
```

gi deg rangen til matrisen.

Ortonormale basiser

Standardbasisen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ i $\mathbb{R}^n$ er ikke bare en basis, den er også en *ortonormal mengde*, dvs. at elementene $\mathbf{e}_i$ har lengde én og står normalt på hverandre. Ortonormale basiser har mange fordeler, og vi skal nå vise at alle underrom har slike basiser. Metoden vi skal bruke til å skaffe oss en ortonormal basis, kalles *Gram-Schmidt-ortogonormalisering* og er nyttig i mange sammenhenger.

Setning 4.7.10 *Ethvert underrom $H \neq \{0\}$ av $\mathbb{R}^n$ har en ortonormal basis, dvs. en basis $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m$ slik at*

$$\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_j = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i \neq j \\ 1 & \text{hvis } i = j \end{cases}$$

Bevis: La $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ være en basis for H. Vi skal omdanne denne basisen til en ortonormal basis $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m$. Vi gjør dette trinnvis, og sørger hele tiden for at $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$ er en ortonormal mengde som utspenner det samme underrommet som $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$.

Prosedyren starter med at vi setter $\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}$. Vi normaliserer altså $\mathbf{v}_1$ slik at den får lengde 1. Det er klart at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{w}_1$ utspenner det samme underrommet.

Nest skritt i prosedyren er å finne $\mathbf{w}_2$. Vi definerer først en vektor $\mathbf{w}_2'$ ved

$$\mathbf{w}_2' = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{w}_1$$

Tar vi skalarproduktet med $\mathbf{w}_1$ på begge sider, ser vi at

$$\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2' = \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - (\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{v}_2)(\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1) = 0$$

siden $\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1 = |\mathbf{w}_1|^2 = 1$. Dette viser at $\mathbf{w}_2'$ og $\mathbf{w}_1$ er ortogonale. Siden $\mathbf{w}_2'$ kan uttrykkes ved hjelp av $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{w}_1$ (og $\mathbf{v}_2$ kan uttrykkes ved hjelp av $\mathbf{w}_2'$ og $\mathbf{w}_1$), er det lett å se at $\mathbf{w}_1$ og $\mathbf{w}_2'$ utspenner samme underrom som $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. Vi avslutter dette trinnet med å sette $\mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{w}_2'}{|\mathbf{w}_2'|}$ for å få en vektor med lengde én (dette ødelegger ikke de egenskapene vi allerede har sjekket).

Vi beskriver nå det generelle skrittet i prosedyren. Anta at vi har greid å finne en ortonormal mengde $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$ som utspenner samme underrom som $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$. Vi definerer først vektoren $\mathbf{w}_{k+1}'$ ved:

$$\mathbf{w}_{k+1}' = \mathbf{v}_{k+1} - (\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{v}_{k+1})\mathbf{w}_1 - (\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_{k+1})\mathbf{w}_2 - \cdots - (\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{v}_{k+1})\mathbf{w}_k \quad (4.7.1)$$

Tar vi skalarproduktet med $\mathbf{w}_i$ (der $i \leq k$) på begge sider, får vi

$$\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_{k+1}' = \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{v}_{k+1} - (\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{v}_{k+1}) \cdot (\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_i) = 0$$

der vi har brukt at $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$ er ortonormale. Dette betyr at $\mathbf{w}_{k+1}$ står normalt på $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$,..., $\mathbf{w}_k$ som allerede står normalt på hverandre. Ved hjelp av ligning (4.7.1) er det lett å se at $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k+1}'$ utspenner samme mengde som $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{v}_{k+1}$, som igjen utspenner samme mengde som $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}$. Til slutt setter vi $\mathbf{w}_{k+1} = \frac{\mathbf{w}_{k+1}'}{|\mathbf{w}_{k+1}'|}$ for å få en vektor med lengde 1 (hvordan vet du at $|\mathbf{w}_{k+1}'|$ ikke er lik 0?). Dermed har vi fått en ortonormal mengde $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_{k+1}$ som utspenner samme underrom som $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{k+1}$.

Fortsetter vi denne prosedyren helt til det ikke er flere $\mathbf{v}$'er igjen, får vi en ortonormal basis $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m$ for H. □

Legg merke til at beviset ovenfor inneholder en oppskrift vi kan følge for å finne en ortonormal basis. Det er imidlertid ikke morsomt å bruke denne oppskriften for hånd, og heldigvis har MATLAB en kommando som gjør arbeidet for oss. Har du lastet inn en matrise A, så vil kommandoen

```
>> orth(A)
```

returnere en ortonormal basis for søylerommet til A.

En av grunnene til at ortonormale basiser er så populære, er at det er svært enkelt å finne ut hvordan man skriver en vektor som en lineær kombinasjon av en slik basis.

Setning 4.7.11 *Anta at* $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m$ *er en ortonormal basis for et underrom* H *av* $\mathbb{R}^n$. *Hvis* $\mathbf{v} \in H$, *så er*

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m$$

der $c_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i$

Bevis: Siden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ er en basis for H, vet vi at det finnes tall $c_1, c_2, \ldots, c_m$ slik at

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m$$

Tar vi skalarproduktet med $\mathbf{v}_i$ på begge sider og bruker at

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i \neq j \\ 1 & \text{hvis } i = j \end{cases},$$

får vi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i = c_i$ □

Oppgaver til seksjon 4.7

1. Finn en basis for underrommet H når

a) $H = \mathrm{Sp}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ der $\mathbf{a}_1 = (1, -2, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (2, -1, 3)$, $\mathbf{a}_3 = (-1, -1, -2)$.

b) $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{j} = 0\}$ (husk at $\mathbf{j} = (0, 0, 1)$).

c) $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 0\}$ der $\mathbf{a} = (1, -2, 1)$.

d) H er søylerommet til matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

e) H er radrommet til matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Finn rangen til A når

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

3. Bruk MATLAB til å finne rangen til matrisene

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & -5 & 11 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Bruk MATLAB til å finne en ortonormal basis for rommet H utspent av

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

5. Vis at $\mathbf{v}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\mathbf{v}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^2$. Skriv $\mathbf{v} = (3, -1)$ som en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$.

6. I denne oppgaven er vi i $\mathbb{R}^3$.

a) Anta at H er en rett linje gjennom origo. Forklar at H er et underrom av $\mathbb{R}^3$. Hva er dimensjonen til H?

b) Anta at H er et plan gjennom origo. Forklar at H er et underrom av $\mathbb{R}^3$. Hva er dimensjonen til H?

7. Anta at A er en ikke-tom mengde vektorer i $\mathbb{R}^n$. Vis at

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 0 \text{ for alle } \mathbf{a} \in A\}$$

er et underrom av $\mathbb{R}^n$. H kalles det *ortogonale komplementet* til A.

8. Anta at H_1 og H_2 er underrom av $\mathbb{R}^n$.

a) Vis at $H = H_1 \cap H_2$ også er et underrom av $\mathbb{R}^n$. (Husk at *snittet* $H_1 \cap H_2$ består av de vektorene som er med i *både* H_1 og H_2.)

b) Vis ved et eksempel at $H = H_1 \cup H_2$ ikke alltid er et underrom av $\mathbb{R}^n$. (Husk at *unionen* $H_1 \cup H_2$ består av de vektorene som er med i minst én av mengdene H_1 og H_2.)

9. Anta at H er et underrom av $\mathbb{R}^n$.

a) Vis at dersom $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ er lineært uavhengige vektorer i H, så kan $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ utvides til en basis for H (det kan tenkes at denne utvidelsen er lik $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$).

b) Anta at K er et *annet* underrom av $\mathbb{R}^m$ slik at $K \subset H$. Vis $\dim(K) < \dim(H)$.

10. I denne oppgaven er A en $m \times n$-matrise.

a) Vis at

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

er et underrom av $\mathbb{R}^n$. H kalles *nullrommet* eller *kjernen* til A.

b) Vis at dimensjonen til H er $n - k$ der k er antall pivotsøyler i den reduserte trappeformen til A. (*Hint:* Tenk på hva som skjer når du løser ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ved trappereduksjon. Du får også behov for å vise at noen vektorer er lineært uavhengige).

c) Bevis *dimensjonsteoremet* som sier at i en $m \times n$-matrise er summen av dimensjonen til søylerommet og dimensjonen til nullrommet alltid lik n.

11. Anta at H_1 og H_2 er underrom av $\mathbb{R}^n$. Vi lar

$$H_1 + H_2 = \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \mid \mathbf{u}_1 \in H_1, \mathbf{u}_2 \in H_2\}$$

dvs. at $H_1 + H_2$ består av alle elementene i $\mathbb{R}^n$ som kan skrives som en sum av et element i H_1 og et element i H_2.

a) Vis at $H_1 + H_2$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$

b) Vis at $\dim(H_1 + H_2) = \dim(H_1) + \dim(H_2) - \dim(H_1 \cap H_2)$

12. I denne oppgaven skal vi se på projeksjoner av vektorer ned på underrom. Dersom H er et underrom av $\mathbb{R}^n$ og $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, sier vi at $\mathbf{y}$ er en *projeksjon* av $\mathbf{x}$ ned på H dersom $\mathbf{y} \in H$ og $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ står normalt på alle vektorer $\mathbf{v} \in H$.

a) Tenk deg (bare i dette punktet) at vi er i $\mathbb{R}^3$ og at H er et plan gjennom origo. Lag en tegning av en projeksjon av en vektor $\mathbf{x}$ ned på H.

b) Vis at dersom y og z er to projeksjoner av $\mathbf{x}$ ned på H, så er $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, med andre ord at det finnes høyst én projeksjon av $\mathbf{x}$ ned på H. (*Hint:* Siden både $\mathbf{y}$ og $\mathbf{z}$ ligger i H, gjør $\mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$ det også. Bruk betingelsene $\mathbf{x} - \mathbf{y} \perp \mathbf{v}$ og $\mathbf{x} - \mathbf{z} \perp \mathbf{v}$ til å utlede at $|\mathbf{y} - \mathbf{z}| = 0$).

c) La $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ være en ortonormal basis for H. Forklar at denne basisen kan utvides til en ortonormal basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ for hele $\mathbb{R}^n$. Dersom

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m + c_{m+1}\mathbf{v}_{m+1} + \ldots + \cdots + c_n\mathbf{v}_n.$$

definerer vi

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m$$

Vis at $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ er en projeksjon av $\mathbf{x}$ ned på H.

d) Vis at $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in H$ og at $\mathbf{P}(\mathbf{P}(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

e) Vis at $\mathbf{P} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er en lineæravbildning.

4.8 Elementære matriser

Alt vi hittil har gjort i dette kapitlet er basert på radoperasjoner. I denne seksjonen skal vi se at det å utføre en radoperasjon, kan tolkes som multiplikasjon med en spesiell type matrise — en såkalt *elementær matrise.* I utgangspunktet kan dette virke som en ganske pussig og unyttig observasjon, men som vi skal se senere, har den mer sprengkraft enn man skulle tro. La oss begynne med definisjonen:

Definisjon 4.8.1 *En* $m \times m$ elementær matrise *er en matrise som fremkommer når vi gjør én (og bare én) radoperasjon på identitetsmatrisen* I_m. *Enhver elementær matrise* korresponderer *altså til en radoperasjon.*

Siden det finnes tre typer radoperasjoner, finnes det også tre typer elementære matriser.

(i) <u>Elementære matriser som fremkommer ved å bytte om to rader i identitetsmatrisen:</u> Et typisk eksempel er

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

der vi har byttet om rad 2 og 4.

(ii) <u>Elementære matriser der vi har multiplisert en av radene i identitetsmatrisen med et tall forskjellig fra 0:</u> Et typisk eksempel er

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

der tredje rad er multiplisert med -3.

(iii) <u>Elementære matriser der vi har lagt et multiplum av en rad til en av de andre radene:</u> Et typisk eksempel er

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

der vi har lagt -2 ganger rad 4 til rad 2.

Den grunnleggende observasjonen om elementære matriser er denne.

Setning 4.8.2 *Anta at E er en elementær $m \times m$-matrise og la A være en vilkårlig $m \times n$-matrise. La A' være den matrisen vi får når vi bruker radoperasjonen som korresponderer til E på A. Da er $A' = EA$.*

Bevis: Det er lettest å sjekke dette selv ved å se hva som skjer når vi ganger en matrise med de forskjellige typene elementære matriser. □

Den neste setningen er helt essensiell for å utnytte elementære matriser.

Setning 4.8.3 *Enhver elementær matrise er inverterbar, og den inverse er også en elementær matrise.*

Bevis: Vi har allerede observert (se seksjon 4.2) at enhver radoperasjon kan "reverseres", det vil si at det finnes en annen radoperasjon som fører matrisen tilbake til utgangspunktet. Det er lett å sjekke at de korresponderende elementærmatrisene er inverse. Vi sjekker dette for det vanskeligste tilfellet som er elmentærmatriser av type (iii) ovenfor:

Anta at E er elementærmatrisen som tilsvarer å addere s ganger rad j til rad i. Den inverse matrisen E' er da den som tilsvarer å addere $-s$ ganger rad j til rad i. Det er lett å sjekke at $E'E = I_n$: Sammenlignet med identitetsmatrisen har E en komponent s "for mye" i posisjon (i, j), og E' fjerner denne ved å addere $-s$ i komponent (i, j). □

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_n$$

$1\cdot 1 + (-5)\cdot 0 = 1$
$1\cdot 5 + (-5)\cdot 1 = 0$
$0\cdot 1 + 1\cdot 0 = 0$
$0\cdot 5 + 1\cdot 1 = 1$

Vi har nå kommet frem til det første hovedresultatet vårt.

Setning 4.8.4 *Enhver $m \times n$-matrise A kan skrives som et produkt*

$$A = E_1E_2 \ldots E_kB$$

\cdot
$E_2 \cdots E_k$

der $E_1, E_2, \ldots, E_k$ er elementære matriser og B er den reduserte trappeformen til A. Dersom A er en inverterbar, kvadratisk matrise, kan A altså skrives som et produkt $A = E_1E_2 \ldots E_k$ av elementære matriser.

Bevis: Vi vet at A kan omdannes til B ved hjelp av en sekvens av radoperasjoner. Hvis $F_1, F_2, \ldots, F_k$ er de korresponderende elementærmatrisene, vet vi fra setning 4.8.2 at

$$B = F_k \ldots F_2F_1A$$

Ganger vi denne ligningen fra venstre med $F_1^{-1}F_2^{-1} \cdots F_k^{-1}$, får vi

$$F_1^{-1}F_2^{-1} \cdots F_k^{-1}B = A$$

Setter vi $E_1 = F_1^{-1}, E_2 = F_2^{-1}, \ldots, E_k = F_k^{-1}$, vet vi fra setningen ovenfor at $E_1, E_2, \ldots, E_k$ er elementære matriser. Dermed er

$$E_1E_2 \ldots E_kB = A$$

som er formelen i setningen. Dersom A er en inverterbar, kvadratisk matrise, er $B = I_n$ og vi får

$$A = E_1E_2 \ldots E_kI_n = E_1E_2 \ldots E_k$$

□

Bemerkning: Legg merke til at de elementære matrisene i setningen ovenfor er de inverse til dem som omdanner A til redusert trappeform, og at de kommer i omvendt rekkefølge.

Vi skal også se raskt på sammenhengen mellom elementære matriser og transponering. Husk at den transponerte matrisen A^T til A er den matrisen vi får når vi bytter om rader og søyler

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Setning 4.8.5 *Den transponerte E^T til en elementær matrise E er selv en elementær matrise. Dersom E korresponderer til å bytte om to rader eller til å gange en rad med et tall s, så er $E = E^T$. Dersom E korresponderer til å addere s ganger linje j til linje i, så korresponderer E^T til å addere s ganger linje i til linje j.*

Bevis: Dette er greit å sjekke selv. □

Kombinert med neste resultat vil setningen ovenfor komme til nytte når vi i neste seksjon skal regne ut determinanten til den transponerte matrisen.

Setning 4.8.6 *Anta at $A = E_1E_2 \dots E_kB$ der $E_1, E_2, \dots, E_k$ er elementære matriser og B er på redusert trappeform. Da er*

$$A^T = B^TE_k^T \dots E_2^TE_1^T$$

$(k \neq l)$

Bevis: Det følger fra setning 1.5.2(v) at den transponerte til et produkt er produktet av de transponerte i omvendt rekkefølge, dvs. $(A_1A_2 \dots A_k)^T = A_k^T \dots A_2^TA_1^T$. Setningen følger umiddelbart fra dette. □

Oppgaver til seksjon 4.8

1. Vis at matrisene er elementære:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Skriv $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ som et produkt av elementære matriser.

3. Skriv $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ som et produkt av elementære matriser.

4. Gjennomfør beviset for setning 4.8.2.

5. Gjennomfør resten av beviset for setning 4.8.3.

6. Gjennomfør beviset for setning 4.8.5.

4.9 Determinanter

I seksjon 1.8 studerte vi 2×2- og 3×3-determinanter, og vi kikket så vidt på hvordan man kan definere determinanten til 4×4- og 5×5-matriser. I denne seksjonen skal vi se på teorien for generelle $n\times n$-determinanter. Definisjonen følger det samme mønsteret som tidligere — hvis vi allerede vet hvordan vi regner ut $(n-1)\times(n-1)$-determinanter, definerer vi $n\times n$-determinanter ved hjelp av denne formelen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} -$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n+1}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

Vi ser hvordan mønsteret er: Hvert element i den første raden ganges med den $(n-1)\times(n-1)$-determinanten vi får når vi stryker raden og søylen gjennom elementet. Alle leddene legges så sammen med alternerende (skiftende) fortegn.

Eksempel 1: Vi skal starte utregningen av 5×5-determinanten

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

(det blir for mye kjedelig arbeid å gjennomføre hele beregningen!) Ifølge definisjonen ovenfor er

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+(-4)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & 0 \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=(-2)\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} -(1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=(-2)(-2)\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} -(-2)(1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} -(1)(1)\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} +(1)(1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 4\cdot(\overbrace{-8+0+0+2+2}^{-4}) + 2(4-1) - 1(-4) + 1(0) = -16+6+4 = -6$$

Nå fortsetter du på samme måte med hver av 4×4-determinantene osv. ♣

Eksemplet ovenfor viser at definisjonen er ubrukelig til å regne ut verdien til store determinanter. Det er heller ikke så lett å se de teoretiske egenskapene til determinanter direkte fra definisjonen. Vi skal derfor bruke litt tid på å beskrive determinanter på andre måter.

Bemerkning: Determinanter er definert *induktivt* ved at vi definerer determinanter av en viss størrelse ved hjelp av determinanter én størrelse mindre. Dette medfører at induksjonsbevis er en naturlig bevismetode når man skal vise egenskaper ved determinanter. Er du uvant med induksjonsbevis (eller synes bevisene nedenfor er vanskelige å forstå), kan det være lurt å ta en kikk på seksjon 1.2 i *Kalkulus*.

Vi skal først se på noen tilfeller der determinanten er spesielt enkel å regne ut.

Lemma 4.9.1 *Anta at A er en kvadratisk matrise der enten en rad eller en søyle bare består av nuller. Da er* $\det(A) = 0$.

Bevis: Vi ser på tilfellet der en søyle er null — beviset for det andre tilfellet ligner, men er litt lettere.

Vi skal vise resultatet for $n \times n$-matriser ved induksjon på n. Det er lett å sjekke at en 2×2-determinant er null dersom en av søylene er null. Anta at resultatet holder for $n \times n$-matriser, og at A er en $(n+1) \times (n+1)$-matrise der j-te søyle er 0. Ifølge definisjonen er

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,j} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} = \\
&= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2,n+1} \\ a_{32} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,j} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} + \cdots \\
\cdots &+ (-1)^{j+1} a_{1j} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n+1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} + \cdots \\
\cdots &+ (-1)^{n+2} a_{1,n+1} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

j'ite søyle er utelatt

I dette uttrykket er leddet

$$(-1)^{j+1}a_{1j}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n+1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix}$$

null fordi $a_{1j} = 0$. De andre leddene er null fordi determinanten inneholder en rad som bare består av nuller, og induksjonshypotesen forteller oss at en slik $n \times n$-determinant er null. □

ett ved

De neste matrisene vi skal beregne determinanten til, er triangulære matriser. Vi kaller en kvadratisk matrise *øvre triangulær* dersom alle elementene under diagonalen er null, og vi kaller den *nedre triangulær* dersom alle elementer over diagonalen er null. Matrisen A nedenfor er øvre triangulær, mens B er nedre triangulær:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Legg merke til at alle trappematriser er øvre triangulære.

Lemma 4.9.2 *Dersom matrisen A er øvre eller nedre triangulær, er determinanten til A lik produktet av elementene på diagonalen til A.*

Bevis: Vi skal bare vise resultatet for øvre triangulære matriser — beviset for nedre triangulære matriser går på samme måte, men er lettere. Også i dette tilfellet går beviset ved induksjon på størrelsen til A. Er A en øvre triangulær 2×2-matrise $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, ser vi at $\det(A) = ad - 0b = ad$, så resultatet stemmer for 2×2-matriser.

Anta nå at resultatet stemmer for øvre triangulære $n \times n$-matriser, og la

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

være en øvre triangulær $(n+1) \times (n+1)$-matrise. Vi har

$$\det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n+1} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} 0 & a_{23} & \cdots & a_{2,n+1} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n+2} a_{1,n+1} \begin{vmatrix} 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n+1} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix}$$

der vi har brukt det forrige lemmaet til å kvitte oss med de determinantene som har en søyle med bare nuller. Ifølge induksjonshypotesen er

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n+1} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33}\cdots a_{n+1,n+1}$$

og dermed får vi $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{n+1,n+1}$. □

Determinanter og radoperasjoner

Vi er nå klare til å starte et litt større prosjekt — vi skal undersøke hva som skjer med determinanten til en matrise når vi utfører en radoperasjon. Dette vil gi oss en mer effektiv måte å regne ut determinanter på, og det vil også gi oss en bedre forståelse av hva determinanter er. Inspirasjon til arbeidet finner vi i setningene 1.8.3 og 1.8.5 som forteller oss hva som skjer med 2×2- og 3×3-determinanter når vi bruker radoperasjoner. Målet er å vise tilsvarende resultater for generelle determinanter. Dette krever en del arbeid (og tålmodighet!)

Vi starter med den enkleste radoperasjonen.

Lemma 4.9.3 *Anta at B er den matrisen vi får når vi ganger den i-te raden i A med tallet s. Da er* $\det(B) = s\det(A)$.

Bevis: Igjen bruker vi induksjon på størrelsen til matrisen A. Hvis A er en 2×2-determinant, er påstanden lett å sjekke (vi kjenner den dessuten fra setning 1.8.3). Anta nå at setningen holder for $n \times n$-matriser, og at A er en $(n+1) \times (n+1)$-matrise. Anta først at B er den matrisen vi får når vi ganger den første raden i A med s. Da er

$$\det(B) = \begin{vmatrix} sa_{11} & sa_{12} & \dots & sa_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} =$$

$$= sa_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n+1} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n+1,2} & a_{n+1,3} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} -$$

$$-sa_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2,n+1} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,3} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n+2} sa_{1,n+1}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} \end{vmatrix} = s\det(A)$$

der vi har brukt at hvert ledd i uttrykket for $\det(B)$ har en ekstra s sammenlignet med uttrykket for $\det(A)$.

La oss nå anta at det er en rad $i > 1$ som ganges med s. Da er

$$\det(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ sa_{i1} & sa_{i2} & \cdots & sa_{i,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ sa_{i2} & sa_{i3} & \cdots & sa_{i,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,2} & a_{n+1,3} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} -$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ sa_{i1} & sa_{i3} & \cdots & sa_{i,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,3} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n+2} a_{1,n+1}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ sa_{i1} & sa_{i2} & \cdots & sa_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} \end{vmatrix} =$$

$$= sa_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{i,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,2} & a_{n+1,3} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} -$$

$$-sa_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i3} & \cdots & a_{i,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,3} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} + \cdots$$

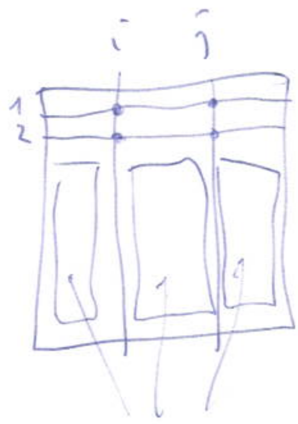
$$\cdots + (-1)^{n+2} s a_{1,n+1}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} \end{vmatrix} = s\det(A)$$

der vi har brukt induksjonshypotesen til å trekke s utenfor $n\times n$-matrisene. □

Vi skal nå se på hva som skjer når vi bytter om to rader. Dette er litt komplisert, men nøkkelen ligger i først å vise hva som skjer når vi bytter om de to øverste radene.

Lemma 4.9.4 *Anta at B er den matrisen vi får når vi bytter om de to øverste radene i A. Da er $\det(A) = -\det(B)$.*

Bevis: Vi tenker oss A er en $n \times n$-matrise og at vi gjennomfører de to første skrittene i utregningen av $\det(A)$ — først uttrykker vi $\det(A)$ ved hjelp av $(n-1)\times(n-1)$-matriser, og så uttrykker vi hver av disse igjen ved hjelp av $(n-2)\times(n-2)$-matriser. De $(n-2)\times(n-2)$-matrisene vi nå har, er fremkommet ved at vi har fjernet de to øverste radene i A samt to av søylene. Dersom $i < j$, lar vi A_{ij} være den $(n-2)\times(n-2)$-determinanten vi får når vi fjerner den i-te og den j-te søylen i tillegg til de to første radene. I utregningene våre oppstår denne determinanten på to måter: Vi kan enten fjerne den i-te søylen i første omgang og den j-te søylen i andre, eller omvendt. I det første tilfellet får vi en faktor $(-1)^{i+1}a_{1i}$ i første omgang og en faktor $(-1)^j a_{2j}$ i andre omgang (observer at siden $i < j$, har a_{2j} nå rykket frem til $(j-1)$-te søyle, og fortegnsfaktoren blir derfor $(-1)^j$ og ikke $(-1)^{j+1}$ som man kanskje ville vente). Totalt gir dette en faktor $(-1)^{i+j+1}a_{1i}a_{2j}$. I det andre tilfellet får vi en faktor $(-1)^{j+1}a_{1j}$ i første omgang og en faktor $(-1)^{i+1}a_{2i}$ i andre omgang. Totalt gir dette en faktor $(-1)^{i+j+2}a_{1j}a_{2i}$. Alt i alt har vi dermed et bidrag til $\det(A)$ på



$$(-1)^{i+j+1}\left(a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i}\right)A_{ij} \tag{4.9.1}$$

det: A_{ij}

Dersom vi gjør tilsvarende beregninger for B, får vi samme svar bortsett fra at elementene i første og annen rad har byttet plass. Dette gir et bidrag på

$$(-1)^{i+j+1}\left(a_{2i}a_{1j} - a_{2j}a_{1i}\right)A_{ij} \tag{4.9.2}$$

Disse uttrykkene er motsatt like store, og dermed ser vi at $\det(B) = -\det(A)$. □

La oss utvide resultatet til alle naborader:

Lemma 4.9.5 *Anta at B er en matrise som fremkommer ved at vi bytter om to naborader i A. Da er* $\det(B) = -\det(A)$.

Bevis: Det er lett å se at resultatet holder for 2×2-matriser, og vi bruker induksjon til å vise det generelt. Vi antar at A er en $(n+1) \times (n+1)$-matrise, og at resultatet holder for $n \times n$-matriser. Dersom vi bytter om de to første radene, følger resultatet fra foregående lemma. Dersom vi bytter om to andre rader, følger resultatet fra induksjonshypotesen. Vi har nemlig

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n+1} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n+1,2} & a_{n+1,3} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{j+1} a_{1j} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n+1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n+2} a_{1,n+1} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} \end{vmatrix}$$

Når vi bytter om de to radene i $\det(A)$, bytter vi også om to rader i hver av de mindre determinantene. Ifølge induksjonshypotesen bytter de da fortegn, og dermed bytter $\det(A)$ fortegn. □

Til slutt utvider vi resultatet til alle rader.

Lemma 4.9.6 *Dersom B fremkommer ved at vi bytter om to rader i A, så er* $\det(B) = -\det(A)$.

Bevis: Vi kan bytte om to vilkårlige rader ved systematisk ombytte av naborader: Anta at vi skal bytte om rad i og rad $i+k$. Vi bytter først om rad $i+k$ med rad $i+k-1$, deretter bytter vi den med rad $i+k-2$ osv. Etter k slike bytter, har raden flyttet seg til i-te posisjon, og den opprinnelige rad i er skjøvet ned til $(i+1)$-te posisjon. Vi bytter nå denne raden nedover til den er i $(i+k)$-te posisjon — dette tar $k-1$ nabobytter. Nå er vi fremme ved matrisen B og har foretatt $2k-1$ ombytter av naborader. Det betyr at determinanten har byttet fortegn et odde antall ganger, og følgelig er $\det(B) = -\det(A)$. □

Før vi går videre, tar vi med oss en nyttig konsekvens av resultatet ovenfor.

Korollar 4.9.7 *Dersom to av radene i A er like, er* $\det(A) = 0$.

Bevis: Dersom vi bytter om de to like radene, vil determinanten ifølge lemmaet ovenfor bytte fortegn. Men determinanten har jo ikke endret seg siden radene vi byttet om var like. Den eneste løsningen på dette tilsynelatende paradokset, er at $\det(A) = 0$. □

Vi er nå fremme ved den siste typen radoperasjon — de hvor vi adderer et multiplum av en rad til en annen.

Lemma 4.9.8 *Anta at B fremkommer fra A ved at vi adderer et multiplum av en av radene i A til en av de andre radene. Da er* $\det(B) = \det(A)$.

Bevis: Igjen går beviset ved induksjon på størrelsen til matrisen. For 2×2-matriser vet vi fra setning 1.8.3 at resultatet holder. Vi antar at resultatet holder for $n\times n$-matriser, og at A er en $(n+1)\times(n+1)$-matrise. Anta først at vi adderer s ganger rad j til rad i der $i > 1$. Da er

$$\det(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+sa_{j1} & a_{i2}+sa_{j2} & \cdots & a_{i,n+1}+sa_{j,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i2}+sa_{j2} & a_{i3}+sa_{j3} & \cdots & a_{i,n+1}+sa_{j,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,2} & a_{n+1,3} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} -$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+sa_{j1} & a_{i3}+sa_{j3} & \cdots & a_{i,n+1}+sa_{j,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,3} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n+2}a_{1,n+1}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1}+sa_{j1} & a_{i2}+sa_{j2} & \cdots & a_{3n}+sa_{jn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} \end{vmatrix}$$

Siden resultatet gjelder for $n \times n$-matriser, vet vi at disse determinantene ikke endrer seg om vi fjerner "s"-leddene. Følgelig er $\det(B) = \det(A)$.

La oss nå se på det gjenstående tilfellet der vi adderer s ganger rad j til den *første* raden. Da har vi:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} a_{11}+sa_{j1} & a_{12}+sa_{j2} & \cdots & a_{1,n+1}+sa_{j,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}+sa_{j1})\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n+1} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n+1,2} & a_{n+1,3} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} -$$

$$-(a_{12}+sa_{j2})\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2,n+1} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,3} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n+2}(a_{1,n+1}+sa_{j,n+1})\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} \end{vmatrix}$$

Ganger vi ut parentesene og samler ledd med og uten s hver for seg, ser vi at $\det(B) = \det(A) + s\det(\tilde{A})$ der $\tilde{A}$ er den matrisen vi får når vi erstatter den første raden med den j-te (hvis du ikke ser dette direkte, så skriv opp det første trinnet i utregningen av $\det(A)$ og $\det(\tilde{A})$). Ifølge korollaret ovenfor er $\det(\tilde{A}) = 0$ siden to av radene er like. Følgelig er $\det(B) = \det(A)$ også i dette tilfellet. □

Vi har nå nådd vårt mål og kan oppsummere hva som skjer med determinanten til en matrise når vi bruker en radoperasjon.

Teorem 4.9.9 *Anta at A er en kvadratisk matrise. Da gjelder:*

(i) Hvis A er øvre eller nedre triangulær, er determinanten lik produktet av diagonalelementene.

(ii) Bytter vi om to rader, bytter determinanten fortegn (men beholder sin tallverdi).

(iii) Ganger vi en rad med et tall s, endres determinanten med en faktor s. (multipliseres)

(iv) Adderer vi et multiplum av en rad til en annen rad, endres ikke determinanten

Bevis: Dette er bare en oppsummering av lemmaene 4.9.2, 4.9.3, 4.9.6 og 4.9.8. □

Resultatet ovenfor gir oss en effektiv metode for å regne ut determinanter. Selv om effektiviteten først viser seg for alvor på større matriser, illustrerer vi metoden i 3×3-tilfellet.

Eksempel 2: Vi skal regne ut determinanten til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Vi radreduserer A mens vi holder styr på hvilke operasjoner vi bruker:

$$A \overset{I \leftrightarrow II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{II+(-3)I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{III+(-2)I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{3}II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{III+(-2)II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix} = B$$

Matrisen B er øvre triangulær, og determinanten er produktet av diagonalelementene: $\det(B) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$. Vi kan nå regne oss bakover til determinanten til A ved å bruke teoremet ovenfor — hver ganger vi bytter om to rader, bytter vi fortegn på determinanten, og hver gang vi ganger en rad med en faktor s, endrer determinanten seg med en faktor s. Den vanligste operasjonen (å addere et multiplum av en rad til en annen) endrer ikke determinanten i det hele tatt. I prosessen ovenfor er det to operasjoner som endrer determinanten — ett radombytte og en multiplikasjon med $\frac{1}{3}$. Det betyr at $\det(B) = (-1) \cdot \frac{1}{3} \cdot \det(A)$ (husk på at det er $\det(A)$ som endres til $\det(B)$). Dermed har vi

$$\det(A) = (-1) \cdot 3 \cdot \det(B) = (-1) \cdot 3 \cdot \frac{8}{3} = -8$$

♣

Prosedyren i eksemplet ovenfor kan brukes på alle kvadratiske matriser — vil vi regne ut determinanten til A, radreduserer vi A til en trappematrise B, og regner ut determinanten til B ved å gange sammen diagonalelementene. Deretter finner vi $\det(A)$ ved formelen

$$\det(A) = s_1^{-1} s_2^{-1} \cdots s_k^{-1} \det(B)$$

der $s_1, s_2, \ldots, s_k$ er *faktorene* til de radoperasjonene vi brukte når vi reduserte A til B. Det burde være klart hva vi mener med *faktoren* til en radoperasjonen — faktoren til et radombytte er -1, faktoren til det å gange en rad med $s \neq 0$ er s, mens faktoren til det å addere et multiplum av én rad til en annen, er 1.

Prosedyren ovenfor har også viktige teoretiske konsekvenser slik det neste teoremet viser. Vi benytter anledningen til også å oppsummere noen tidligere resultater:

Teorem 4.9.10 *For $n \times n$-matriser A er følgende ekvivalent:*

(i) $\det(A) \neq 0$

(ii) A er inverterbar Matriseligningen $A\vec{x} = \vec{b}$ har en løsning for hver $\vec{b}$

(iii) Matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en entydig løsning for alle $\mathbf{b}$

(iv) Matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har bare løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

(v) Søylene i A danner en basis for $\mathbb{R}^n$

(vi) A er radekvivalent med I_n

Bevis: Vi vet allerede at (ii), (iii) (iv) og (v) er ekvivalente med (vi) (det følger fra hhv. setning 4.5.4, setning 4.3.3, setning 4.4.3 og setning 4.6.10), så det gjenstår bare å vise at (i) er ekvivalent med (vi). Anta at B er den reduserte trappeformen til A og la $s_1, s_2, \ldots, s_k$ være faktorene til de radoperasjonene vi bruker når vi reduserer A til B. Da er

$$\det(A) = s_1^{-1} s_2^{-1} \cdots s_k^{-1} \det(B)$$

og følgelig er $\det(A) \neq 0$ hvis og bare hvis $\det(B) \neq 0$. En matrise B på redusert trappeform er øvre triangulær, og determinanten er derfor lik produktet av diagonalelementene. Det betyr at determinanten er forskjellig fra null hvis og bare hvis alle pivotelementene står på diagonalen, dvs. når $B = I_n$. □

Determinanten til et produkt

Vi skal nå se hvordan vi kan bruke elementære matriser til å bevise noen viktige setninger om determinanter. Siden en elementær matrise fremkommer ved å gjøre en enkelt radoperasjon på identitetsmatrisen, er det lett å regne ut determinanten.

Lemma 4.9.11 *Anta at E er en elementær $n \times n$-matrise. Da er determinanten til E lik faktoren til den tilhørende radoperasjonen. Svarer E til å bytte om to rader, er altså $\det(E) = -1$, svarer E til å gange en rad med s, er $\det(E) = s$, og svarer E til å addere et multiplum av en rad til en annen, er $det(E) = 1$.*

Bevis: Dette følger direkte fra Teorem 4.9.9 siden en elementær matrise fremkommer fra identitetsmatrisen når vi bruker den korresponderende radoperasjonen. □

Det neste lemmaet er også en omformulering av tidligere resultater.

Lemma 4.9.12 *Anta $C = EB$ der E er en elementær matrise. Da er* $\det(C) = \det(E)\det(B)$.

Bevis: Vi vet fra Setning 4.8.2 at C er den matrisen som fremkommer når vi bruker radoperasjonen til E på B. Fra Teorem 4.9.9 vet vi at da er $\det(C) = s\det(B)$, der s er faktoren til denne radoperasjonen. Ifølge foregående lemma er $s = \det(E)$, og dermed får vi $\det(C) = \det(E)\det(B)$. □

Konklusjonen i lemmaet ovenfor kan skrives slik: $\det(EB) = \det(E)\det(B)$. Målet vårt er å utvide denne formelen til alle matriser A slik at vi generelt får $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Før vi går løs på den generelle formelen, trenger vi litt informasjon om hva som skjer når matrisen A ikke er inverterbar.

Lemma 4.9.13 *Anta at A og B er to $n \times n$-matriser. Hvis A ikke er inverterbar, så er heller ikke produkt~~et~~matrisen $C = AB$ inverterbar.*

Bevis: Hvis A ikke er inverterbar, må den reduserte trappeformen mangle pivotelement i en rad. Det betyr at det finnes en vektor $\mathbf{b}$ slik at ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke har løsning. Dermed kan heller ikke ligningen $C\mathbf{y} = \mathbf{b}$ ha en løsning, for hvis $\mathbf{y}$ var en løsning av denne ligningen, ville $\mathbf{x} = B\mathbf{y}$ være en løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Vi har nemlig

$$A\mathbf{x} = A(B\mathbf{y}) = (AB)\mathbf{y} = C\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

Dette betyr at ligningen $C\mathbf{y} = \mathbf{b}$ ikke har løsning, og følgelig er C ikke inverterbar. □

Vi er nå klar til å vise formelen vår

Setning 4.9.14 *For alle $n \times n$-matriser A, B er*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Bevis: Dersom A ikke er inverterbar, vet vi fra lemmaet at AB heller ikke er inverterbar. Likheten $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ holder derfor fordi begge sider er null.

Anta så at A er inverterbar. Fra setning 4.8.4 vet vi at A kan skrives som et produkt av elementærmatriser $A = E_1E_2\cdots E_{\cancel{m}k}$. Bruker vi lemma 4.9.12 gjentatte ganger, har vi dermed

$$\det(A) = \det(E_1E_2\cdots E_{\cancel{m}k}) = \det(E_1)\det(E_2E_3\cdots E_{\cancel{m}k}) =$$
$$\det(E_1)\det(E_2)\det(E_3\cdots E_{\cancel{m}k}) = \ldots = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_{\cancel{m}k})$$

Tilsvarende er

$$\det(AB) = \det(E_1E_2\cdots E_{\cancel{m}k}B) = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_{\cancel{m}k})\det(B)$$

og følgelig er $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. □

Bemerkning: Dersom vi tenker på determinanten som en forstørrelsesfaktor (se seksjon 2.9), er resultatet ovenfor som forventet — forstørrer vi først med en faktor $\det(B)$ og så med en faktor $\det(A)$, bør den samlede forstørrelsesfaktoren $\det(AB)$ være lik produktet $\det(A)\det(B)$. Vær forøvrig oppmerksom på at det ikke finnes noen tilsvarede enkel metode for å regne ut determinanten til en sum.

Setningen ovenfor har mange nyttige konsekvenser:

Korollar 4.9.15 *For alle inverterbare matriser A er*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Bevis: Ifølge setningen ovenfor er

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$$

□

Korollar 4.9.16 *For alle $n \times n$-matriser er*

$$\det(A^T) = \det(A)$$

Bevis: Observer først at dersom E er en elementær matrise, så forteller setning 4.8.5 oss at E^T er en elementær matrise med samme faktor. Dermed er $\det(E^T) = \det(E)$ ifølge lemma 4.9.11.

Ifølge setning 4.8.4 kan enhver matrise A skrives som et produkt $A = E_1 E_2 \cdots E_m B$ der $E_1, E_2, \ldots, E_m$ er elementære matriser, og B er på redusert trappeform. Ifølge setningen ovenfor er

$$\det(A) = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_m)\det(B)$$

Siden $A^T = B^T E_m^T \cdots E_2^T E_1^T$ (se setning 4.8.6 om du ikke ser dette direkte), får vi tilsvarende

$$\det(A^T) = \det(B^T)\det(E_m^T)\cdots\det(E_2^T)\det(E_1^T)$$

Vi har allerede observert at $\det(E_1^T) = \det(E_1)$, $\det(E_2^T) = \det(E_2), \ldots,$ $\det(E_m^T) = \det(E_m)$, så det er nok å vise at $\det(B^T) = \det(B)$. Siden B er en øvre triangulær matrise, er B^T nedre triangulær, og begge determinantene er da lik produktet av diagonalelementene ifølge lemma 4.9.2. Diagonalelementene endrer seg ikke når vi transponerer, og dermed er $\det(B^T) = \det(B)$. □

Resultatet ovenfor er nyttig når vi skal regne ut visse determinanter:

Eksempel 3: Tenk deg at vi skal regne ut determinanten til

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ifølge korollaret ovenfor kan vi like godt regne ut determinanten til $\det(A^T)$, og da får vi

$$\det(A) = \det(A^T) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \\ -3 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

der vi har utnyttet alle nullene til å forenkle regnearbeidet (fullfør utregningene selv). □

Utvikling langs rader og søyler

Når vi bruker definisjonen til å uttrykke en $n \times n$-determinant ved hjelp av $(n-1) \times (n-1)$-determinanter, sier vi at vi *utvikler* eller *ekspanderer* determinanten langs første rad. Det viser seg at vi kan utvikle en determinant også langs andre rader — og faktisk også langs søyler (her bruker vi trikset i eksempel 3; vi transponerer matrisen for å gjøre om søyler til rader).

Når vi utvikler determinanten til en $n \times n$-matrise A langs i-te rad, tar vi det første elementet a_{i1} i raden og ganger med den $(n-1) \times (n-1)$-matrisen vi får når vi fjerner raden og søylen gjennom a_{i1}. Deretter gjør vi det samme med det andre elementet i raden; vi ganger a_{i2} med den $(n-1) \times (n-1)$-determinanten vi får når vi fjerner raden og søylen gjennom a_{i2}. Vi fortsetter på denne måten bortover hele raden, og til slutt legger vi sammen alle leddene med vekslende fortegn. Her må vi være litt forsiktige — når vi utvikler langs første rad, begynner vi alltid med positivt fortegn, men det gjelder ikke generelt. Regelen er at dersom nummeret i på raden er et oddetall, begynner vi med positivt fortegn, dersom i er et partall, begynner vi med negativt fortegn. Figuren nedenfor viser hvilket fortegn de forskjellige leddene får når vi utvikler en determinant.

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Du kan sjekke at fortegnet til det (i,j)-te elementet er gitt ved $(-1)^{i+j}$. Når vi har utviklet langs i-te rad, sitter vi dermed igjen med

$$\det(A) = (-1)^{i+1}a_{i1}A_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}A_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}A_{in}$$

der A_{ij} er determinanten vi får når vi fjerner raden og søylen gjennom a_{ij}.

Det er ofte lurt å utvikle en determinant langs en annen rad enn den første fordi vi da kan utnytte spesielle egenskaper ved determinanten. Spesielt er det lurt å utvikle langs en rad med mange nuller. La oss se på et eksempel:

Eksempel 4: Vi skal regne ut determinanten til

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi velger å utvikle langs fjerde rad siden den inneholder to nuller. Siden dette er en "partallsrad", må vi begynne med negativt fortegn:

$$\det(A) = -0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} -$$

$$-2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Vi fortsetter på samme måte med 3×3-matrisene. På grunn av nullen, lønner det seg nå å utvikle langs annen rad. For oversiktens skyld tar vi determinantene hver for seg. Vi får

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1)) - 3 \cdot (2 \cdot 2 - 3 \cdot 3) = 25$$

og

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$= (-2) \cdot (2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1)) - 3 \cdot (2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1) = 5$$

Dermed har vi $\det(A) = 25 - 2 \cdot 5 = 15$. □

Hvorfor får vi riktig svar når vi utvikler en determinant langs en annen rad enn den første? Det er ikke så vanskelig å forklare. Anta at vi ønsker å utvikle determinanten til A langs i-te rad. Vi kan flytte denne raden til toppen av matrisen gjennom $i - 1$ radombytter — først bytter vi raden med den $(i-1)$-te, så med rad nummer $(i-2)$ osv. Til slutt får vi en matrise B der den i-te raden i A står øverst, mens alle de andre kommer i opprinnelig rekkefølge. Siden determinanten bytter fortegn for hvert radombytte, ser vi at $\det(B) = (-1)^{i-1}\det(A)$, dvs. at $\det(B) = \det(A)$ hvis i er et oddetall, og $\det(B) = -\det(A)$ hvis i er et partall. Hvis vi nå regner ut determinanten til B ved å utvikle langs første rad (altså i henhold til definisjonen), får vi nøyaktig de samme leddene som når vi utvikler $\det(A)$ langs i-te rad, bortsett fra at fortegnene til leddene er motsatt dersom i er et partall. Dette fortegnsbyttet kompenserer for at $\det(B) = -\det(A)$ når i er et partall, og dermed ser vi at prosedyren gir riktig svar i alle tilfeller.

Vi kan også utvikle determinanter langs søyler istedenfor rader. Ønsker vi å utvikle determinanten til $n \times n$-matrisen A langs j-te søyle, starter vi med det første elementet a_{1j} i søylen, og ganger det med den $(n-1) \times (n-1)$-determinanten vi får når vi fjerner raden og søylen gjennom a_{1j}. Vi gjør tilsvarende med de andre elementene i søylen, og til slutt legger vi sammen alle leddene med vekslende fortegn. Fortegnet følger det samme sjakkbrettmønsteret som tidligere. Det er lett å se hvorfor denne prosedyren gir riktig svar — å utvikle determinanten til A etter j-te søyle, er det samme som å utvikle determinanten til A^T etter j-te rad, og vi vet at $\det(A^T) = \det(A)$. La oss se på et enkelt eksempel.

Eksempel 5: Vi skal regne ut determinanten til

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Det lønner seg å utvikle langs siste søyle siden den inneholder to nuller:

$$\det(A) = 0 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -3 \cdot (2 \cdot 1 - 3 \cdot 1) = 3$$

□

Vi har nå den kunnskapen vi trenger om determinanter. I neste seksjon skal vi se hvordan vi kan bruke denne kunnskapen til å finne egenverdier og egenvektorer.

Oppgaver til seksjon 4.9

1. Bruk definisjonen av determinant til å regne ut determinanten til matrisene:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

2. Bruk radoperasjoner til å regne ut determinanten til matrisene:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

3. Regn ut determinanten ved å ekspandere langs velvalgte søyler og rader:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

4. Bruk MATLAB til å regne ut determinanten til matrisen:

a) $\begin{pmatrix} 7 & -3 & 3 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 4 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -4 & 3 & -3 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

5. Bevis radtilfellet av lemma 4.9.1.

6. Bevis lemma 4.9.2 for nedre triangulære matriser.

7. Vis at dersom A er en $n \times n$-matrise og r er et tall, så er $\det(rA) = r^n \det(A)$.

8. Vis at $\det(A^n) = \det(A)^n$ for alle hele tall n (på høyre side er det $\det(A)$ som opphøyes i n-te).

9. Bruk teorem 4.9.9 til å vise at dersom radene til A er lineært avhengige, så er $\det(A) = 0$. (*Hint:* Bruk radoperasjoner til å skaffe deg en rad som bare består av nuller). Vis at dette også følger fra teorem 4.9.10 og korollar 4.9.16.

10. En $n \times n$-matrise kalles *ortogonal* ~~*ortogonal matrise*~~ dersom $U^{-1} = U^T$. Vis at $\det(U)$ er enten 1 eller -1. -1

11. I denne oppgaven skal vi bruke følgende notasjon: Dersom A er en $n \times n$-matrise og $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ er en søylevektor, så er $A_i(\mathbf{b})$ matrisen vi får når vi erstatter den i-te søylen til A med $\mathbf{b}$. Vi skal vise at dersom A er inverterbar, så er løsningen

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

til ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gitt ved

$$x_i = \frac{\det(A_i(\mathbf{b}))}{\det(A)}$$

Dette kalles *Cramers regel*.

a) Vis at dersom I er $n \times n$-identitetsmatrisen, så er $\det(I_i(\mathbf{x})) = x_i$.

b) Vis at $AI_i(\mathbf{x}) = A_i(\mathbf{b})$.

c) Bevis Cramers regel.

d) Bruk Cramers regel til å løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 4 \\ x - 4y &= -2 \end{aligned}$$

4.10 Egenvektorer og egenverdier

Dersom A er en $n \times n$-matrise, kalles en vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ en *egenvektor* for A dersom $A\mathbf{v}$ er parallell med $\mathbf{v}$, det vil si dersom det finnes et tall λ slik at $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Tallet λ kalles en *egenverdi* for A. Vi har vært borti egenvektorer og egenverdier tidligere, men siden vi ikke har hatt noen metode for å finne dem, har det vært vanskelig å utnytte dem skikkelig. Med det vi nå har lært om determinanter, har vi de redskapene vi trenger.

Det er et par ting vi bør avklare før vi begynner. For det første legger vi merke til at dersom $\mathbf{v}$ er en egenvektor med egenverdi λ, så er også enhver parallell vektor $a\mathbf{v}$ (der a er et tall forskjellig fra 0) en egenvektor med egenverdi λ siden

$$A(a\mathbf{v}) = aA(\mathbf{v}) = a(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(a\mathbf{v})$$

Når vi er på jakt etter egenvektorer, er det nok å finne én av disse parallelle vektorene, og vi velger da som regel en som har "pene" (f.eks. heltallige) komponenter.

Den andre tingen vi bør være klar over, er at selv om en matrise A er reell, kan det hende at den har egenverdier og egenvektorer som er komplekse (se eksempel 5 i seksjon 1.9). Skal man løse et praktisk problem, er det ofte helt nødvendig å studere disse komplekse egenvektorene og egenverdiene, og det medfører at vi er nødt til å bruke teorien fra de tidligere seksjonene på komplekse tall og komplekse vektorer. I noen tilfeller går vi da utover det vi strengt tatt har bevist, men det er ikke vanskelig å sjekke at de tidligere resultatene i dette kapitlet også holder for komplekse tall og komplekse vektorer. Det eneste vi må passe litt ekstra på når vi regner med komplekse vektorer, er skalarproduktet. Som du kanskje husker fra seksjon 1.3, inneholder skalarproduktet av to komplekse vektorer $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ en komplekskonjugasjon — vi har

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}$$

Når vi skal finne egenvektorer og egenverdier, lønner det seg som regel å finne egenverdiene først. Ifølge definisjonen er λ en egenverdi for A dersom det finnes en ikke-null vektor $\mathbf{v}$ slik at

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

Sagt på en annen måte: λ er en egenverdi for A dersom ligningen $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ har en ikke-null løsning $\mathbf{v}$. Skriver vi høyresiden av denne ligningen som $\lambda I_n\mathbf{v}$ og flytter leddet $A\mathbf{v}$ over på den andre siden, får vi

$$(\lambda I_n - A)\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{4.10.1}$$

Dette betyr at λ er en egenverdi for A hvis og bare hvis ligning (4.10.1) har en løsning $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Ifølge teorem 4.9.10 skjer dette hvis og bare hvis $\det(\lambda I_n - A) = 0$. Vi har dermed vist:

Lemma 4.10.1 *λ er en egenverdi for $n \times n$-matrisen A hvis og bare hvis* $\det(\lambda I_n - A) = 0$. □

Observer at dersom

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

så er

$$\lambda I_n - A = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}$$

La oss se på et eksempel.

Eksempel 1: Vi skal finne egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Vi ser at

$$\det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 1 \\ -5 & \lambda + 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 4)(\lambda + 2) - (-5) \cdot 1 = \lambda^2 - 2\lambda - 8 + 5 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

Egenverdiene er altså løsningene til annengradsligningen

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

Løser vi denne, får vi egenverdiene $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$.

Når vi har funnet egenverdiene, er det ingen sak å finne egenvektorene. En egenvektor $\mathbf{v}_1$ med egenverdi $\lambda_1 = 3$, er en løsning av ligningen

$$A\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{v}_1$$

Setter vi inn $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, får vi

$$\begin{aligned} 4x - y &= 3x \\ 5x - 2y &= 3y \end{aligned}$$

som kan omformes til

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 5x - 5y &= 0 \end{aligned}$$

Vi kan selvfølgelig løse dette systemet ved Gauss-eliminasjon, men det er egentlig unødvendig — vi ser at ligningene har de samme løsningene, og at vi derfor kan nøye oss med å løse den første. Den har åpenbart løsningene $x = y$. Dette betyr at vi kan velge y fritt og så regne ut x. Alle vektorer vi får på denne måten er parallelle, og vi plukker derfor bare ut én av dem. Velger vi $y = 1$, får vi $x = 1$, og vi ser dermed at $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor.

La oss også finne en egenvektor $\mathbf{v}_2$ for den andre egenverdien $\lambda_2 = -1$. Denne vektoren må være en løsning av ligningen

$$A\mathbf{v}_1 = (-1)\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_1$$

Setter vi inn $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, får vi

$$\begin{aligned} 4x - y &= -x \\ 5x - 2y &= -y \end{aligned}$$

som kan omformes til

$$\begin{aligned} 5x - y &= 0 \\ 5x - y &= 0 \end{aligned}$$

Igjen ser vi at vi kan regne ut x når vi har valgt y. Velger vi $y = 5$, får vi $x = 1$, og dermed har vi $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Vi har altså to egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Det er lett å se at disse er lineært uavhengige og dermed danner en basis for $\mathbb{R}^2$. ♣

I eksemplet ovenfor måtte vi løse en annengradsligning for å finne egenverdiene til en 2×2-matrise. Dette er typisk — skal vi finne egenverdiene til en $n \times n$-matrise, må vi løse en n-tegradsligning. Grunnen er at når vi regner ut $\det(\lambda I_n - A)$, får vi et n-tegradspolynom i λ. For å overbevise deg om dette behøver du bare å tenke på hva som skjer når du utvikler en matrise etter første rad (hvis du vil, kan du føre et induksjonsbevis).

Definisjon 4.10.2 *Dersom A er $n \times n$-matrise, kalles n-tegradspolynomet*

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

det karakteristiske polynomet[1]*til*A.

[1] De fleste bøker bruker definisjonen $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ isteden. De to definisjonene skiller seg med en faktor $(-1)^n$, og er derfor så godt som ekvivalente. Fordelen med vårt valg er at vi slipper en del unødvendige minuser når vi skal finne egenverdier i praksis.

Fra algebraens fundamentalteorem (se *Kalkulus*, teorem 3.5.1) vet vi at et n-tegradspolynom alltid har n røtter når vi teller med multiplisitet og tillater komplekse løsninger. Det vanligste er at alle røttene er forskjellige. Det neste resultatet viser at hvis det karakteristiske polynomet P_A har n forskjellige røtter, så har vi en basis av egenvektorer for A.

Setning 4.10.3 *La A være en $n \times n$-matrise, og anta at $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_k$ er egenvektorer med forskjellige egenverdier. Da er $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_k$ lineært uavhengige. Dersom A har n forskjellige egenverdier, finnes det altså en basis som består av egenvektorer for A.*

Bevis: Anta (for motsigelse) at det finnes lineært avhengige egenvektorer med forskjellige egenverdier, og la $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_k$ være en slik mengde med færrest mulige elementer. Vi ser at k er minst 2 siden en mengde som bare består av ett ikke-null element umulig kan være lineært avhengig. Siden vektorene er lineært avhengige, finnes det tall c_1, c_2, ..., c_k som ikke alle er null, slik at en ··· vektor ?

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \tag{4.10.2}$$

Faktisk må *alle* c'ene være forskjellige fra null, for hvis ikke finnes det en mindre, lineært avhengig mengde av egenvektorer. Hvis vi ganger ligning (4.10.2) fra venstre med A, får vi

$$c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \tag{4.10.3}$$

der $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ er egenverdiene. Ganger vi ligning (4.10.2) med $-\lambda_1$ og legger resultatet til (4.10.3), får vi

$$c_2(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{v}_2 + c_3(\lambda_3 - \lambda_1)\mathbf{v}_3 + \cdots + c_k(\lambda_k - \lambda_1)\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

Siden alle c'ene er forskjellige fra null og egenverdiene er forskjellige, viser dette at $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, ..., $\mathbf{v}_k$ er lineært avhengige, men det er umulig siden $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_k$ er en *minimal*, lineært avhengig mengde. Dette betyr at antagelsen om at det finnes lineært avhengige egenvektorer med forskjellige egenverdier, er gal, og dermed er den første delen av setningen bevist. Den andre delen følger siden enhver lineært uavhengig mengde med n elementer i $\mathbb{R}^n$ er en basis (se korollar 4.6.11). □

Multiple egenverdier

Vi har nå sett at dersom alle egenverdiene til en matrise er forskjellige, så finnes det en basis av egenvektorer. Det er naturlig å tenke seg at dette også gjelder dersom noen av egenverdiene er sammenfallende — det naturlige tipset er at dersom λ er en egenverdi med multiplisitet k, så finnes det k lineært uavhengige egenvektorer med egenverdi λ. Dette er imidlertid ikke tilfellet, og dermed er det heller ikke slik at enhver matrise har en basis av egenvektorer. La oss se på et eksempel.

Eksempel 2: Vi skal finne egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Det karakteristiske polynomet er

$$P_A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 2)\lambda - (-1) \cdot 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

som bare har én rot $\lambda = 1$. Denne roten har multiplisitet 2 siden

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

En egenvektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ må tilfredsstille $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$, dvs.

$$\begin{aligned} 2x - y &= x \\ x &= y \end{aligned}$$

Dette ligningssystemet er oppfylt hvis $x = y$, dvs. hvis $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$. Alle disse vektorene er lineært avhengige, så selv om λ har multiplisitet 2, finnes det ikke to lineært uavhengige vektorer med egenverdi 1. Det finnes heller ikke noen basis bestående av egenvektorer til A. ♣

Vi skal se på et eksempel til. Dette eksemplet viser at vi ikke må bli *for* pessimistiske; vi kan godt ha en basis av egenvektorer selv om ikke alle egenverdiene er forskjellige. Eksemplet demonstrerer også noen av de regnetekniske utfordringene vi får, når vi skal finne egenverdiene til litt større systemer.

Eksempel 3: Vi skal finne egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Det karakteristiske polynomet er gitt ved:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \lambda - \frac{4}{3} \end{vmatrix}$$

For å regne ut polynomet, ekspanderer vi langs andre rad og får

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 1)\begin{vmatrix} \lambda - \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \lambda - \frac{4}{3} \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\left((\lambda - \frac{5}{3})(\lambda - \frac{4}{3}) - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\right) =$$

$$= (\lambda - 1)\left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right)$$

Annengradspolynomet $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ har røttene 2 og 1 (sjekk!), og dermed har P_A røttene 2 og 1 — den siste med multiplisitet 2. Egenverdiene til A er dermed også 2 og 1.

La oss først finne egenvektorene med egenverdi 1. En slik egenvektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

må tilfredsstille ligningen $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$, dvs.

$$\begin{aligned} \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z &= x \\ y &= y \\ -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{4}{3}z &= z \end{aligned}$$

Dette systemet kan også skrives

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z &= 0 \\ 0 &= 0 \\ -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z &= 0 \end{aligned}$$

Det er mange måter å løse dette systemet på, men siden det er viktig ikke å miste noen løsninger, kobler vi inn den "offisielle" metoden vår. Den utvidede matrisen til ligningssystemet er

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Vi radreduserer denne matrisen ved å legge den første raden til den tredje, og deretter gange den første raden med $\frac{3}{2}$. Vi sitter da igjen med matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser at y og z er frie variable, mens x er en basisvariabel. Velger vi verdier for y og z, får vi

$$x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$$

En egenvektor må derfor være på formen

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dette viser at

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

genererer alle egenvektorer med egenverdi 1, og det er lett å sjekke at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige.

Vi ser nå på den andre egenverdien 2. En egenvektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

med denne egenverdien må tilfredsstille ligningen $A\mathbf{v} = 2\mathbf{v}$, dvs.

$$\begin{aligned} \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z &= 2x \\ y &= 2y \\ -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{4}{3}z &= 2z \end{aligned}$$

Dette systemet kan også skrives

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z &= 0 \\ -y &= 0 \\ -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z &= 0 \end{aligned}$$

Den utvidede matrisen til dette ligningssystemet er

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Vi radreduserer denne matrisen:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \overset{III+(-2)I}{\sim} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III+(-1)II}{\sim} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{(-3)I \\ (-1)II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser at z er en fri variabel, mens x og y er basisvariable. Velger vi en verdi for z, får vi

$$y = 0$$

og

$$x = y - z = -z$$

En egenvektor må derfor være på formen

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alle disse vektorene er parallelle, og vi velger

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

som vår representant. Vi har dermed tre egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Det er lett å sjekke at disse er lineært uavhengige og dermed danner en basis for $\mathbb{R}^3$. ♣

Bemerkning: Eksemplene ovenfor viser at det ikke er så lett å vite hva som skjer med egenvektorene når vi har sammenfallende egenverdier — i noen tilfeller vil vi ha en basis av egenvektorer, i andre tilfeller ikke. Det viser seg at en egenverdi λ med multiplisitet k kan ha alt fra 1 til k lineært uavhengige egenvektorer, og at matrisen har en basis av egenvektorer hvis og bare hvis hver egenverdi har så mange egenvektorer som det er mulig å ha ifølge denne regelen.

Komplekse egenverdier

Vi tar også med et eksempel der egenverdiene er komplekse. Fremgangsmåten er akkurat den samme som i det reelle tilfellet, men regningene kan bli litt styggere siden vi nå får ligningssystemer med komplekse koeffisienter.

Eksempel 4: Vi skal finne egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Det karakteristiske polynomet er

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

Setter vi dette uttrykket lik null og løser annengradsligningen, får vi

$$\lambda = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = 1 \pm 2i$$

Egenverdiene er altså $\lambda_1 = 1 + 2i$ og $\lambda_2 = 1 - 2i$.

Vi finner først en egenvektor $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ med egenverdi λ_1. En slik vektor må oppfylle ligningen

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1 + 2i) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

det vil si

$$\begin{aligned} x - 2y &= (1 + 2i)x \\ 2x + y &= (1 + 2i)y \end{aligned}$$

Flytter vi leddene på høyre side over på den andre siden, og forkorter med 2, får vi

$$\begin{aligned} -ix - y &= 0 \\ x - iy &= 0 \end{aligned}$$

Ganger vi den øverste ligningen med i, får vi den nederste ligningen, og det er derfor nok å finne en løsning til den ene av ligningene. Velger vi y lik 1 i den nederste ligningen, får vi $x = i$, og dermed har vi funnet egenvektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi kan finne en egenvektor $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ med egenverdi λ_2 på akkurat samme måte. En slik vektor må oppfylle ligningen

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1-2i)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

det vil si

$$\begin{aligned} x - 2y &= (1-2i)x \\ 2x + y &= (1-2i)y \end{aligned}$$

Flytter vi leddene på høyre side over på den andre siden, og forkorter med 2, får vi

$$\begin{aligned} ix - y &= 0 \\ x + iy &= 0 \end{aligned}$$

Ganger vi den første ligningen med $-i$, får vi den andre, så det er nok å løse én av ligningene. Velger vi $y = 1$ i den nederste, får vi $x = -i$. Dermed har vi egenvektoren

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

♣

I eksemplet ovenfor ser vi at de to egenverdiene og de to egenvektorene er komplekskonjugerte av hverandre. At egenverdiene er komplekskonjugerte, er ikke noe mysterium — det følger av at de komplekse røttene til et reelt polynom alltid kommer i komplekskonjugerte par (se *Kalkulus*, lemma 3.5.3). For å sjekke at det samme gjelder egenvektorene, trenger vi et lite resonnement.

Setning 4.10.4 *Anta at A er en reell $n \times n$-matrise, og at $\mathbf{v}$ er en kompleks egenvektor med egenverdi λ. Da er $\overline{\mathbf{v}}$ en egenvektor med egenverdi $\overline{\lambda}$ (her er $\overline{\mathbf{v}}$ den vektoren vi får når vi komplekskonjugerer alle komponentene til $\mathbf{v}$).*

Bevis: (I dette beviset bruker vi regnereglene for konjugasjon på vektorer og matriser, og ikke bare på tall. Du bør sjekke at dette er tillatt.) Siden A er reell, har vi

$$\overline{A\mathbf{v}} = \overline{A}\,\overline{\mathbf{v}} = A\overline{\mathbf{v}}$$

På den annen side er

$$\overline{A\mathbf{v}} = \overline{\lambda\mathbf{v}} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{v}}$$

Kombinerer vi disse to uttrykkene får vi

$$A\overline{\mathbf{v}} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{v}}$$

som viser at $\overline{\mathbf{v}}$ er en egenvektor med egenverdi $\overline{\lambda}$. □

Legg merke til at vi kan bruke denne setningen til å forenkle arbeidet med å finne komplekse egenvektorer. I eksempel 4 kunne vi ha brukt den til å skrive opp $\mathbf{v}_2$ med en gang vi hadde funnet $\mathbf{v}_1$.

Egenverdier til symmetriske matriser

Vi må innrømme at teorien vår har sine ubehagelige sider — det er ikke alle matriser som har en basis av egenvektorer, og det kan godt tenkes at egenverdiene er komplekse selv om matrisen er reell. Dette må vi bare leve med — det er nå slik verden engang er. Det finnes imidlertid noen matriser som oppfører seg slik vi kunne ønske oss, nemlig de symmetriske.

Definisjon 4.10.5 *En $n \times n$-matrise A er* symmetrisk *dersom $A = A^T$.*

Navnet *symmetrisk* kommer av at en symmetrisk matrise ikke endrer seg når vi speiler den om diagonalen. Disse matrisene er symmetriske:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 5 & 0 \\ -2 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & \pi \end{pmatrix}$$

De symmetriske matrisene kan virke spesielle, men de dukker opp i forbausende mange sammenhenger. I neste kapittel skal vi utnytte at matriser bestående av de annenderiverte til en funksjon (såkalte Hesse-matriser) er symmetriske.

Vi trenger en definisjon til før vi kan skrive opp hovedresultatet for symmetriske matriser (har du lest seksjon 4.7 vil du ha sett både denne definisjonen og setning 4.10.7 før): En basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ er *ortonormal* dersom alle vektorene i basisen har lengde 1 og står ortogonalt (normalt) på hverandre — med andre ord dersom

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i \neq j \\ 1 & \text{hvis } i = j \end{cases}$$

Teorem 4.10.6 (Spektralteoremet for symmetriske matriser) *Anta at A er en symmetrisk $n \times n$-matrise. Da er alle egenverdiene til A reelle, og det finnes en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer til A.*

Vi utsetter beviset for dette teoremet til seksjon 4.12 — det er ikke spesielt vanskelig, men det krever en del forberedelser som vi ikke har gjort ennå.

Ortonormale basiser har mange fordeler — blant annet er det raskt å finne ut hvordan man kan skrive en vilkårlig vektor som en lineærkombinasjon av basisvektorene:

Setning 4.10.7 *Anta at* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ *er en ortonormal basis for* $\mathbb{R}^n$. *For ethvert element* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ *er da*

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

der $c_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i$ *for* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Bevis: Siden $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_n$ er en basis, vet vi at $\mathbf{v}$ kan skrives som en lineærkombinasjon

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_i\mathbf{v}_i + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

Tar vi skalarproduktet med $\mathbf{v}_i$ på begge sider, får vi

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i = c_1\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_i + c_2\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_i + \cdots + c_i\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \cdots + c_n\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_i = c_i$$

der vi har brukt at

$$\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_i = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i \neq j \\ 1 & \text{hvis } i = j \end{cases}$$

□

Diagonalisering av matriser

Dersom en matrise har en basis av egenvektorer, kan den *diagonaliseres ~~diagonalisering~~* på en måte som ofte er nyttig.

Setning 4.10.8 *Anta at* A *er en* $n \times n$*-matrise med en basis* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ *av egenvektorer, og la* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *være de tilhørende egenverdiene. La* $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *være lineæravbildningen som for alle* i *avbilder* $\mathbf{e}_i$ *på* $\mathbf{v}_i$, *og la* $M = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ *være matrisen til* $\mathbf{T}$. *Da er* M *inverterbar, og*

$$M^{-1}AM = D$$

der D *er diagonalmatrisen*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Bevis: Ifølge setning 4.6.13 finnes det virkelig en lineæravbildning $\mathbf{T}$ slik at $\mathbf{T}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{v}_i$ for alle i, og fra setning 1.9.4 vet vi at søylene i M er $\mathbf{T}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{v}_1$, $\mathbf{T}(\mathbf{e}_2) = \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{T}(\mathbf{e}_n) = \mathbf{v}_n$. Per definisjon er $M\mathbf{e}_i = \mathbf{v}_i$ for alle i. Ved setning 4.6.13 finnes det også en lineæravbildning $\hat{\mathbf{T}}$ slik at $\hat{\mathbf{T}}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{e}_i$ for alle i. Hvis $\hat{M}$ er matrisen til denne lineæravbildningen, er $\hat{M}\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$ for alle i. Dermed er $\hat{M}M\mathbf{e}_i = \hat{M}\mathbf{v}_i = \mathbf{e}_i$. Dette betyr at $\hat{M}M\mathbf{e}_i = I_n\mathbf{e}_i$ for alle basiselementer $\mathbf{e}_i$, og ifølge setning 4.6.12 er da $\hat{M}M = I_n$. Dette betyr at M er inverterbar med $M^{-1} = \hat{M}$

For å vise at $D = M^{-1}AM$, observerer vi først at $D\mathbf{e}_i = \lambda_i\mathbf{e}_i$. Ifølge setning 4.6.13 er da nok å vise at $M^{-1}AM\mathbf{e}_i = \lambda_i\mathbf{e}_i$ for alle i. Men det er lett:

$$M^{-1}AM\mathbf{e}_i = M^{-1}A\mathbf{v}_i = M^{-1}\lambda_i\mathbf{e}_i = \lambda_i M^{-1}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{e}_i$$

Dermed er setningen bevist □

Når vi bruker setningen ovenfor i praksis, må vi ofte arbeide en del for å finne M^{-1} siden invertering av matriser tar mye tid. Dersom matrisen A er symmetrisk, har vi ifølge spektralteoremet 4.10.6 en ortonormal basis av egenvektorer. I dette tilfellet er det enkelt å finne M^{-1}; det viser seg nemlig at M^{-1} er lik den transponerte matrisen M^T.

Korollar 4.10.9 *Anta at A er en symmetrisk $n\times n$-matrise, la $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ være en ortonormal basis av egenvektorer, og la $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ være de tilhørende egenverdiene. La $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ være lineæravbildningen som for alle i avbilder $\mathbf{e}_i$ på $\mathbf{v}_i$, og la $M = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n)$ være matrisen til $\mathbf{T}$. Da er*

$$M^T AM = D$$

der D er diagonalmatrisen

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

□

Bevis: Det holder å vise at $M^T = M^{-1}$, dvs. at $M^T M = I_n$. Per definisjon av matrisemultiplikasjon er det ij-te elementet i $M^T M$ lik prikkproduktet av den i-te linjen i M^T med den j-te søylen i M. Den i-te linjen i M^T er lik den i-te søylen i M som er lik $\mathbf{v}_i$, og den j-te søylen i M er lik $\mathbf{v}_j$. Altså er det ij-te elementet i $M^T M$ lik $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ som er 1 hvis $i = j$ og 0 ellers (her bruker vi at basisen er ortonormal). Følgelig er $M^T M = I_n$, og beviset er fullført. □

Setningen ovenfor gir oss en viktig forbindelse mellom egenverdier og determinanter.

Korollar 4.10.10 *Anta at A er en $n\times n$-matrise med en basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ av egenvektorer, og la $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ være de tilhørende egenverdiene. Da er*

$$\det(A) = \lambda_1\lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

Determinanten er altså lik produktet av egenverdiene.

Bevis: La D være diagonalmatrisen i setningen ovenfor. Da er (ifølge lemma 4.9.2)

$$\det(D) = \lambda_1 \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

Bruker vi isteden setning 4.9.14, får vi

$$\det(D) = \det(M^{-1}AM) = \det(M^{-1})\det(A)\det(M) = \det(A)$$

der vi også har brukt at ifølge korollar 4.9.15 er $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$. □

Egenverdier med MATLAB

Det er lett å finne egenverdier og egenvektorer med MATLAB. Det er flere kommandoer du kan bruke, men den nyttigste er som regel

```
>> [u,v]=eig(A)
```

Se.: $[M, D]$ eller $[V, D]$?

Denne kommandoen definerer to matriser u og v. Søylene i matrisen u er egenvektorene til A, mens v er en diagonalmatrise der elementene på diagonalen er egenverdiene til A. Egenvektorene og egenverdiene kommer i samme rekkefølge slik at den første egenverdien tilhører den første egenvektoren osv. Her er et eksempel på en kjøring:

```
>> B=[2 1 3
4 0 3
1 1 -2];

>> [u,v]=eig(B)

u =

   -0.2864   -0.0000    0.3833
   -0.9143    0.9487   -0.8404
   -0.2864    0.3162    0.3833


v =

    2.1926         0         0
         0    1.0000         0
         0         0   -3.1926
```

Vær oppmerksom på at MATLAB alltid velger egenvektorer med lengde 1. Dette er praktisk for noen formål, men fører ofte til at egenvektorene blir mer uoversiktlige enn nødvendig. De fleste av oss ville f.eks. ha oppgitt den andre egenvektoren ovenfor som $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, men MATLAB velger altså en normalisert variant. Mer ubegripelig er MATLABs forkjærlighet for å velge negative komponenter i egenvektorene; for de fleste formål ville det være mer naturlig å velge den første egenvektoren til å være

$$\begin{pmatrix} 0.2864 \\ 0.9143 \\ 0.2864 \end{pmatrix} \text{ istedenfor } \begin{pmatrix} -0.2864 \\ -0.9143 \\ -0.2864 \end{pmatrix}$$

Når man regner videre med egenvektorer man har fått av MATLAB, kan det derfor være lurt å se om man kan forenkle dem ved å velge en annen skalering eller et annet fortegn.

Det er en ting til man bør være klar over. MATLAB vil av og til operere med en liten imaginærdel i en egenverdi/egenvektor som egentlig er reell. Det skyldes at MATLAB er et numerisk beregningsverktøy som regner med avrundede tall. Får du egenverdier/egenvektorer med en ørliten imaginærdel (eller en ørliten realdel), kan det være lurt å sjekke om dette er en avrundingsfeil før du går videre.

Oppgaver til seksjon 4.10

1. Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

2. Finn egenverdier og egenvektorene til matrisen:

a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (*Hint*: Tipp en rot i polynomet) c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Bruk MATLAB til å finne egenvektorene og egenverdiene til matrisen :

a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0.5 \\ 3 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 0.4 & 10 \\ -2.4 & 7.3 & 0.05 \\ 4.2 & 1 & -3.2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 & 4 \\ -5 & 2 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & -8 & 3 \\ -4 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

4. Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen A og skriv vektoren $\mathbf{x}$ som en lineærkombinasjon av egenvektorer:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{4}{3} & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. Bruk MATLAB til å finne egenverdien og egenvektorene til matrisen A. Bruk også MATLAB til å skrive vektoren $\mathbf{x}$ som en lineærkombinasjon av egenvektorene:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2.5 & -3 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 2.4 \\ -3.4 \end{pmatrix}.$

b) $A = \begin{pmatrix} 2.3 & -0.3 & 1.2 & 3 \\ 1.2 & 3 & 2.4 & -1.2 \\ 3.3 & -1.2 & 0.5 & 7 \\ -2 & 3.1 & -2.1 & 1.3 \end{pmatrix}, \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1.3 \\ 2.4 \\ 0.04 \\ 4.1 \end{pmatrix}$

6. La $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Finn en diagonalmatrise D og en inverterbar matrise M slik at $D = M^T DM$.

7. Vis at A og A^T har de samme egenverdiene. Har de også de samme egenvektorene?

8. Anta at $\mathbf{v}$ er en egenvektor for både A og B. Vis at $\mathbf{v}$ er en egenvektor for $A+B$.

9. Anta at $\mathbf{v}$ er en egenvektor for både A og B. Vis at $\mathbf{v}$ er en egenvektor for AB.

10. To $n \times n$-matriser A og B kalles *similære* dersom det finnes en inverterbar matrise P slik at $B = P^{-1}AP$. Vis at A og B da har de samme egenverdiene. Finn egenvektorene til B uttrykt ved hjelp av P og egenvektorene til A.

11. Anta at A er en inverterbar matrise og at $\mathbf{v}$ er en egenvektor for A med egenverdi $\lambda \neq 0$. Vis at $\mathbf{v}$ er en egenvektor for A^{-1} med egenverdi λ^{-1}.

12. Vis at dersom alle søylene i en matrise har samme sum, så er dette tallet en egenverdi for matrisen (*Hint*: Gjør noen radoperasjoner før du regner ut determinanten til $\lambda I_n - A$). Bruk dette til å finne egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

13. Vis at egenverdien til en 2×2-matrise

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

er

$$\lambda = \frac{a + d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2}$$

Bruk denne formelen til å forklare at egenverdiene til en symmetrisk (reell) 2×2-matrise alltid er reelle.

14. En symmetrisk $n \times n$-matrise A kalles *positiv definit* dersom $(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} > 0$ for alle $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

a) Vis at A er positiv definit hvis og bare hvis alle egenverdiene til A er strengt positive.

b) Anta at A og B er to symmetriske matriser med strengt positive egenverdier. Vis at alle egenverdiene til $A + B$ er strengt positive.

15. Anta at $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ er et polynom og at A er en kvadratisk matrise. Da er $P(A)$ matrisen

$$P(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1 A + a_0$$

a) Vis at dersom $\mathbf{v}$ er en egenvektor for A med egenverdi λ, så er $\mathbf{v}$ en egenvektor for $P(A)$ med egenverdi $P(\lambda)$.

b) Vi lar nå P_A være det karakteristiske polynomet til A. Vis at $P_A(A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ for alle egenvektorer $\mathbf{v}$ til A.

c) Vis at dersom A har en basis av egenvektorer, så er $P_A(A) = 0$.

(*Kommentar*: Det viser seg at $P_A(A) = 0$ også når A ikke har en basis av egenvektorer. Dette kalles *Cayley-Hamiltons teorem*.)

4.11 Egenvektorer i praksis

I denne seksjonen skal vi se på tre eksempler som illustrerer hvordan egenvektorer og egenverdier kan brukes i praksis. Disse eksemplene er lange og ganske kompliserte, men de viser på en realistisk måte hva vi må gjøre for å analysere problemer fra den virkelige verden. Det siste eksemplet viser også hvor nyttig det er å ha et verktøy som MATLAB når matrisene blir store og uttrykkene stygge.

Før vi begynner, minner vi om følgende viktige observasjon fra kapittel 2:

Setning 4.11.1 *Anta at $\mathbf{v}$ er en egenvektor for A med egenverdi λ. Da er $\mathbf{v}$ en egenvektor for A^n med egenverdi λ^n, dvs.*

$$A^n\mathbf{v} = \lambda^n\mathbf{v}$$

Bevis: Vi har

$$A^2\mathbf{v} = A(A\mathbf{v}) = A(\lambda\mathbf{v}) = \lambda A\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}$$
$$A^3\mathbf{v} = A(A^2\mathbf{v}) = A(\lambda^2\mathbf{v}) = \lambda^2 A\mathbf{v} = \lambda^3\mathbf{v}$$

osv. Før gjerne et induksjonsbevis om du vil! □

Eksempel 1: Vi går tilbake til handlevogneksemplet i seksjon 1.5: Et kjøpesenter har tre stativ X, Y og Z hvor du kan hente og avlevere handlevogner. Av de vognene som starter dagen i stativ X, vil 70% avslutte den på samme sted, 10% vil ha endt opp i Y, og 20% i Z. Av de vognene som startet dagen i stativ Y, vil 30% avslutte dagen i stativ X, mens henholdsvis 50% og 20% vil havne i stativene Y og Z. De tilsvarende tallene for vogner som starter i Z, er at 40% ender dagen i X, 20% i Y og 40% i Z. Vi ordner disse tallene i en matrise A der første søyle gir fordelingen av de vognene som startet i X, andre søyle gir fordelingen av de vognene som startet i Y og tredje søyle gir fordelingen av vognene som startet i Z:

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Vi ser at hvis vi starter dagen med x_0 handlevogner i stativ X, y_0 handlevogner i stativ Y og z_0 handlevogner i stativ Z, og lar

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

så vil vektoren

$$\mathbf{r}_1 = A\mathbf{r}_0$$

gi oss fordelingen av handlevogner på slutten av dagen. Hvis handlesenteret aldri rydder opp i handlevognene, men lar dem bli stående der kundene setter dem, vil fordelingen etter n dager være gitt ved vektoren

$$\mathbf{r}_n = A^n\mathbf{r}_0$$

Vi skal se hvordan vi kan bruke egenverdiene og egenvektorene til A til å finne et uttrykk for $\mathbf{r}_n$.

Vi regner først ut egenverdiene til A. Etter en del regning finner vi at

$$\det(\lambda I_3 - A) = \left| \begin{matrix} \lambda - 0.7 & -0.3 & -0.4 \\ -0.1 & \lambda - 0.5 & -0.2 \\ -0.2 & -0.2 & \lambda - 0.4 \end{matrix} \right] =$$

$$= \lambda^3 - 1.6\lambda^2 + 0.68\lambda - 0.08$$

For å finne egenverdiene må vi altså løse tredjegradsligningen

$$\lambda^3 - 1.6\lambda^2 + 0.68\lambda - 0.08 = 0$$

Dette kan høres vanskelig ut, men ved innsetting ser vi at $\lambda = 1$ er en løsning. Vi kan derfor polynomdividere med $\lambda - 1$ og få

$$\lambda^3 - 1.6x\lambda^2 + 0.68\lambda - 0.08 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 0.6\lambda + 0.08)$$

Løsningene til annengradsligningen $\lambda^2 - 0.6\lambda + 0.08 = 0$ er

$$\lambda = \frac{-(-0.6) \pm \sqrt{(-0.6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0.08}}{2 \cdot 1} = \frac{0.6 \pm 0.2}{2} = \begin{cases} 0.4 \\ 0.2 \end{cases}$$

Egenverdiene til A er dermed $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.4$ og $\lambda_3 = 0.2$.

Neste punkt på programmet er å finne egenvektorene. Dersom $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ er en egenvektor med egenverdi 1, må vi ha

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Dette gir ligningssystemet

$$\begin{aligned} -0.3x + 0.3y + 0.4z &= 0 \\ 0.1x - 0.5y + 0.2z &= 0 \\ 0.2x + 0.2y - 0.6z &= 0 \end{aligned}$$

Vi ganger ligningssystemet med 10 for å slippe desimaltall og skriver deretter opp den utvidede matrisen:

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Radreduserer vi matrisen, får vi:

$$B \overset{I \leftrightarrow II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -6 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{II+3I \\ III+(-2)I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -12 & 10 & 0 \\ 0 & 12 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III+II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -12 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{-\frac{1}{12}II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser at z er en fri variabel. Gitt z, kan vi regne ut $y = \frac{5}{6}z$, $x = 5y - 2z = 5 \cdot \frac{5}{6}z - 2z = \frac{13}{6}z$. Velger vi derfor $z = 6$, får vi $y = 5$ og $x = 13$. Dette gir egenvektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Vi kan finne egenvektorene knyttet til de andre egenverdiene på tilsvarende måte. Vi får

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Siden egenverdiene er forskjellige, vet vi at $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ danner en basis. Begynnelsestilstanden $\mathbf{r}_0$ kan derfor skrives som en lineærkombinasjon av egenvektorene

$$\mathbf{r}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 \tag{4.11.1}$$

Vi skal finne konstantene c_1, c_2, c_3 senere, men la oss foreløpig arbeide videre med uttrykket ovenfor. Ganger vi med A^n på begge sider, får vi

$$\mathbf{r}_n = A^n\mathbf{r}_0 = c_1A^n\mathbf{v}_1 + c_2A^n\mathbf{v}_2 + c_3A^n\mathbf{v}_3 =$$

$$= c_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^n\mathbf{v}_2 + c_3\lambda_3^n\mathbf{v}_3 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\cdot(0.4)^n\mathbf{v}_2 + c_3\cdot(0.2)^n\mathbf{v}_3$$

Tar vi grensen når $n \to \infty$, blir de to siste leddene borte, og vi sitter igjen med

$$\mathbf{r}_n \to c_1\mathbf{v}_1 \qquad \text{når } n \to \infty$$

Dette betyr at fordelingen av handlevogner nærmer seg en likevektstilstand når n går mot uendelig, og denne fordelingen er bestemt av egenvektoren til den største egenverdien.

La oss til slutt se hvordan vi kan finne konstantene c_1, c_2, c_3. Vi må da spesifisere begynnelsestilstanden $\mathbf{r}_0$, og la oss anta at handlesenteret har 144 handlevogner som alle blir plassert i stativ X i utgangspunktet. Det betyr at

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 144 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

og at ligning (4.11.1) ovenfor kan skrives:

$$c_1\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 144 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

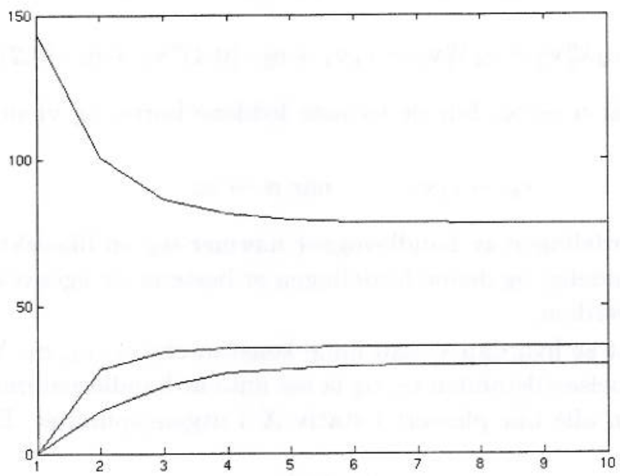
Dette er ekvivalent med ligningssystemet

$$\begin{aligned} 13c_1 + c_2 + c_3 &= 144 \\ 5c_1 - c_2 + c_3 &= 0 \\ 6c_1 - 2c_2 &= 0 \end{aligned}$$

som har løsningene $c_1 = 6$, $c_2 = 48$, $c_3 = 18$. Setter vi dette inn i uttrykket for $\mathbf{r}_n$ ovenfor, får vi

$$\mathbf{r}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + 48 \cdot (0.4)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 18 \cdot (0.2)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Likevektstilstanden i dette tilfellet er gitt ved $6\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 \\ 30 \\ 36 \end{pmatrix}$, dvs. 78 handlevogner i stativ X, 30 i stativ Y og 36 i stativ Z. Figuren nedenfor viser hvordan fordelingen nærmer seg likevektstilstanden. Den øverste kurven viser antall vogner i stativ X, den nest øverste antall vogner i stativ Z og den nederste antall vogner i stativ Y. ♣



Bemerkning: Oppførselen i eksemplet ovenfor er typisk for systemer der vi har en konstant mengde (i eksemplet: antall handlevogner) som omfordeles mellom tilstander (i eksemplet: stativene X, Y, Z). I slike systemer er 1 alltid en egenverdi, og den tilhørende egenvektoren beskriver en likevektstilstand for systemet.

I det neste eksemplet skal vi se på et system av differensialligninger.

Eksempel 2: Dyreslagene I og II lever i det samme området. Dyreslag II er avhengig av dyreslag I som føde for å kunne overleve i området. Store mengder av dyreslag II vil derfor bremse veksten til dyreslag I, mens store mengder av dyreslag I fremmer veksten til dyreslag II. Dersom $x(t)$ og $y(t)$ er mengden av hhv. dyreslag I og dyreslag II ved tiden t, antar vi at ligningene som styrer veksten til de to dyreslagene, er

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{1}{5}x(t) - \frac{1}{20}y(t) \\ y'(t) &= \frac{1}{4}x(t) - \frac{1}{10}y(t) \end{aligned}$$

Vår oppgave er å løse ligningssystemet og finne uttrykk for $x(t)$ og $y(t)$. Siden ligningssystemet kobler de to ukjente funksjonene til hverandre, kan vi ikke bruke våre vanlige differensialligningsteknikker til å finne $x(t)$ og $y(t)$ hver for seg. Vi skal se hvordan vi kan bruke egenverdier og egenvektorer til å "dekoble" ligningssystemet slik at vi får to ligninger som kan løses hver for seg.

Vi observerer først at dersom vi innfører vektorfunksjonen

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

kan ligningssystemet skrives

$$\mathbf{r}'(t) = A\mathbf{r}(t)$$

der

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{20} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Vi finner først egenverdiene og egenvektorene til matrisen A. Det karakteristiske polynomet

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{5} & \frac{1}{20} \\ -\frac{1}{4} & \lambda + \frac{1}{10} \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{10}\lambda - \frac{3}{400}$$

har røttene

$$\lambda = \frac{-(-\frac{1}{10}) \pm \sqrt{(-\frac{1}{10})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\frac{3}{400})}}{2 \cdot 1} = \frac{\frac{1}{10} \pm \frac{2}{10}}{2} = \begin{cases} \frac{3}{20} \\ -\frac{1}{20} \end{cases}$$

Egenverdiene er altså $\lambda_1 = \frac{3}{20}$ og $\lambda_2 = -\frac{1}{20}$.

En egenvektor $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ med egenverdi $\lambda_1 = \frac{3}{20}$ må oppfylle ligningen

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{20} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3}{20} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Multipliserer vi ut, får vi ligningene

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}x - \frac{1}{20}y &= \frac{3}{20}x \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{10}y &= \frac{3}{20}y \end{aligned}$$

Flytter vi over og rydder opp litt, ser vi at begge disse ligningene er ekvivalente med

$$x - y = 0$$

Det betyr at vi kan velge y fritt, men at x da er gitt ved $x = y$. Velger vi y=1, får vi $x = 1$, og den første egenvektoren vår er dermed

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

På tilsvarende måte må en egenvektor $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ med egenverdi $\lambda_2 = -\frac{1}{20}$ oppfylle ligningen

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{20} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{20} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Multipliserer vi ut, får vi ligningene

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}x - \frac{1}{20}y &= -\frac{1}{20}x \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{10}y &= -\frac{1}{20}y \end{aligned}$$

Flytter vi over og rydder opp litt, ser vi at begge disse ligningene er ekvivalente med

$$5x - y = 0$$

Det betyr at vi kan velge y fritt, men at x da er gitt ved $5x = y$. Velger vi $y = 5$, får vi $x = 1$, og den andre egenvektoren vår er dermed

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Vi går nå tilbake til differensialligningene våre. Siden $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ er en basis for $\mathbb{R}^2$, kan enhver vektor skrives som en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. Det betyr at det for hver t finnes tall $c_1(t)$ og $c_2(t)$ slik at

$$\mathbf{r}(t) = c_1(t)\mathbf{v}_1 + c_2(t)\mathbf{v}_2$$

Deriverer vi, får vi

$$\mathbf{r}'(t) = c_1'(t)\mathbf{v}_1 + c_2'(t)\mathbf{v}_2$$

Sette vi dette inn i ligningen $\mathbf{r}'(t) = A\mathbf{r}(t)$, ser vi at

$$c_1'(t)\mathbf{v}_1 + c_2'(t)\mathbf{v}_2 = A\big(c_1(t)\mathbf{v}_1 + c_2(t)\mathbf{v}_2\big) =$$

$$= c_1(t)A\mathbf{v}_1 + c_2(t)A\mathbf{v}_2 = c_1(t)\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2(t)\lambda_2\mathbf{v}_2$$

Vi har altså

$$c_1'(t)\mathbf{v}_1 + c_2'(t)\mathbf{v}_2 = c_1(t)\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2(t)\lambda_2\mathbf{v}_2$$

og siden $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige, betyr dette at

$$c_1'(t) = \lambda_1 c_1(t) \qquad \text{og} \qquad c_2'(t) = \lambda_2 c_2(t)$$

Legg merke til at vi nå har "dekoblet" ligningssystemet og fått to differensialligninger som kan løses hver for seg. Gjør vi det, får vi

$$c_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} = C_1 e^{\frac{3}{20}t} \qquad \text{og} \qquad c_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} = C_2 e^{-\frac{1}{20}t}$$

der C_1 og C_2 er konstanter. Dermed har vi

$$\mathbf{r}(t) = C_1 e^{\frac{3}{20}t}\mathbf{v}_1 + C_2 e^{-\frac{1}{20}t}\mathbf{v}_2$$

For å bestemme konstantene C_1 og C_2 trenger vi flere opplysninger om dyrestammene. La oss anta at det ved tiden $t = 0$ er 3 000 dyr av slag I og 11 000 av slag II. Det betyr at

$$\begin{pmatrix} 3\,000 \\ 11\,000 \end{pmatrix} = \mathbf{r}(0) = C_1\mathbf{v}_1 + C_2\mathbf{v}_2 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Løser vi dette ligningssystemet, får vi $C_1 = 1\,000$ og $C_2 = 2\,000$. Dermed har vi

$$\mathbf{r}(t) = 1\,000e^{\frac{3}{20}t}\mathbf{v}_1 + 2\,000e^{-\frac{1}{20}t}\mathbf{v}_2 = 1\,000e^{\frac{3}{20}t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\,000e^{-\frac{1}{20}t}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\,000e^{\frac{3}{20}t} + 2\,000e^{-\frac{1}{20}t} \\ 1\,000e^{\frac{3}{20}t} + 10\,000e^{-\frac{1}{20}t} \end{pmatrix}$$

Antall dyr av slag I ved tiden t er dermed $x(t) = 1\,000e^{\frac{3}{20}t} + 2\,000e^{-\frac{1}{20}t}$, mens antall dyr av slag II er $y(t) = 1\,000e^{\frac{3}{20}t} + 10\,000e^{-\frac{1}{20}t}$.

Til slutt legger vi nok en gang merke til hvordan vi i dette eksemplet brukte egenvektorer til å "dekoble" systemet — de opprinnelige funksjonene $x(t)$ og $y(t)$ er koblet sammen gjennom ligningssystemet, mens de nye funksjonene c_1 og c_2 er "frakoblet" hverandre og oppfyller hver sin ligning. Slike "dekoblinger" står sentralt i mange anvendelser av egenvektorer. ♣

La oss til slutt se på et litt mer komplisert eksempel der vi får god bruk for MATLAB til å holde styr på egenverdier og egenvektorer. Eksemplet minner en del om eksempel 1, men vi ser nå på et system som vokser, og der mye av poenget er å finne hvor stor veksten er. Eksemplet viser også hva som skjer dersom vi har komplekse egenverdier.

Eksempel 3: Et dyreslag har en levealder på fire år. Det første året er dyrene *unger*, det andre året er de *ungdommer*, det tredje året er de *voksne* og det fjerde året er de *eldre*. Av ungene overlever 50% til året etter, av ungdommene overlever 80% til året etter og av de voksne overlever 20% til året etter. En ungdom gir i gjennomsnitt opphav til 0.5 unger som blir født året etter, en voksen gir i gjennomsnitt opphav til 2 unger som blir født året etter, og et eldre dyr gir i gjennomsnitt opphav til 0.1 unge som blir født året etter. Vi antar at vi starter med 200 dyr i hver aldersklasse, og ønsker å finne ut hvordan stammen utvikler seg.

La x_n, y_n, z_n og u_n være henholdsvis antall unger, ungdommer, voksne og eldre i år n. Da er

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 0.5y_n + 2z_n + 0.1u_n \\ y_{n+1} &= 0.5x_n \\ z_{n+1} &= 0.8y_n \\ u_{n+1} &= 0.2z_n \end{aligned}$$

I tillegg vet vi at $x_1 = y_1 = z_1 = u_1 = 200$.

Det er flere måter å angripe dette problemet på. La oss først se hva som skjer når vi bruker MATLAB til å regne ut utviklingen de 50 første årene. Vi lager m-filen

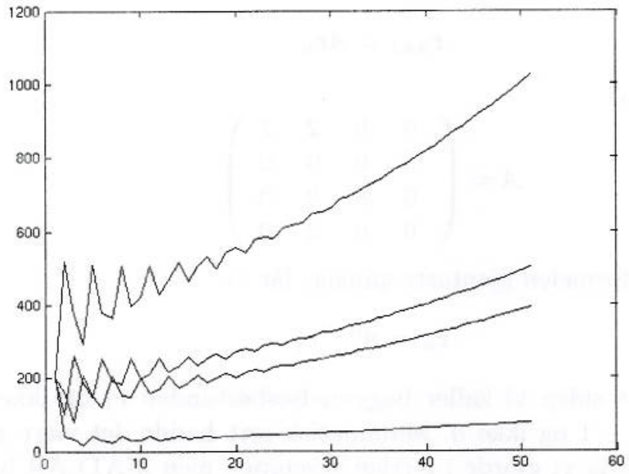
```
function [x,y,z,u]=dyrestamme(a,b,c,d,N)
x(1)=a;
y(1)=b;
z(1)=c;
u(1)=d;
for n=1:N
    x(n+1)=.5*y(n)+2*z(n)+.1*u(n);
    y(n+1)=.5*x(n);
    z(n+1)=.8*y(n);
    u(n+1)=.2*z(n);
end
```

Den neste kommandosekvensen får MATLAB til å plotte ut følgene i samme figur:

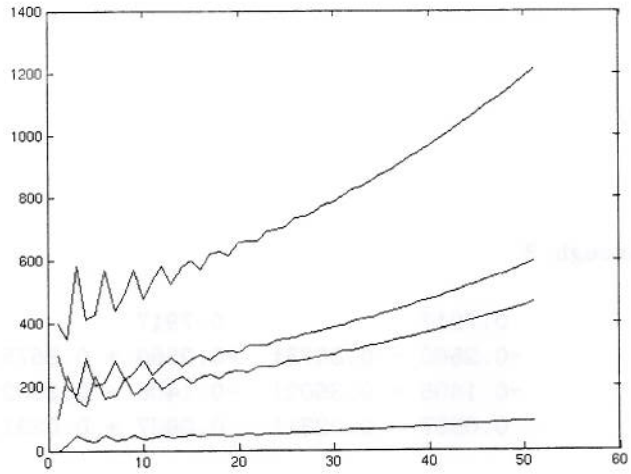
```
>> [x,y,z,u]=dyrestamme(200,200,200,200,49);
>> plot(x)
>> hold on
>> plot(y)
>> plot(z)
>> plot(u)
```

Resultatet er figuren nedenfor der den øverste kurven gir antall unger, den nest øverste antall ungdommer, den tredje øverste antall voksne og den nederste antall eldre.

Disse kurvene er ikke så lette å tolke. Det ser ut som de etter noen innledende svingninger går over i jevn vekst, og at fordelingen mellom de forskjellige aldersgruppene nærmer seg en likevekt. Men hvor kommer svingningene fra, hvor rask er veksten, og hvordan finner vi likevektsfordelingen mellom aldersgruppene?



La oss kjøre programmet en gang til med startverdier $x_1 = 400$, $y_1 = 300$, $z_1 = 100$, $u_1 = 0$. Resultatet ser du på figuren nedenfor, og i hovedtrekk ligner det forbløffende på det vi fikk i stad; etter noen innledende svingninger går kurvene over i jevn vekst, og forholdet mellom aldersgruppene ligner på det vi fikk ovenfor.



Vi skal nå se hvordan vi kan bruke egenverdier og egenvektorer til å forklare disse resultatene. Det første vi observerer, er at dersom vi innfører vektorene

$$\mathbf{r}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ u_n \end{pmatrix}$$

så kan ligningssystemet ovenfor skrives

$$\mathbf{r}_{n+1} = A\mathbf{r}_n$$

der A er matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & .5 & 2 & .1 \\ .5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .2 & 0 \end{pmatrix}$$

Bruker vi denne formelen gjentatte ganger, får vi

$$\mathbf{r}_n = A^{n-1}\mathbf{r}_1$$

Legg merke til at siden vi kaller begynnelsesbestanden $\mathbf{r}_1$ og ikke $\mathbf{r}_0$, må A oppphøyes i $n-1$ og ikke n. Matematisk sett hadde det vært greiere å begynne med $\mathbf{r}_0$ slik vi gjorde i forrige eksempel, men MATLAB begynner alltid nummereringer på 1, og vi har derfor valgt å holde oss til det siden vi MATLAB bruker såpass mye i dette eksemplet.

La oss benytte MATLAB til å finne egenverdiene og egenvektorene til A:

```
>> A=[0 .5 2 .1
.5 0 0 0
0 .8 0 0
0 0 .2 0];

>> [u,v]=eig(A)

u =

  Columns 1 through 3

  -0.8472            0.7917              0.7917
  -0.4151           -0.2560 - 0.3675i  -0.2560 + 0.3675i
  -0.3254           -0.1405 + 0.3802i  -0.1405 - 0.3802i
  -0.0638            0.0887 - 0.0231i   0.0887 + 0.0231i

  Column 4

  -0.0000
```

```
    0.0006
   -0.0501
    0.9987

v =

  Columns 1 through 3

   1.0206                  0                  0
        0      -0.5053 + 0.7253i              0
        0                  0      -0.5053 - 0.7253i
        0                  0                  0

  Column 4

        0
        0
        0
  -0.0100
```

Vi har altså egenverdiene $\lambda_1 = 1.0206$, $\lambda_2 = -0.5053 + 0.7253i$, $\lambda_3 = -0.5053 - 0.7253i$, $\lambda_4 = -0.01$ med tilhørende egenvektorer (vi bytter fortegn på den første av dem for å slippe minuser):

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0.8472 \\ 0.4151 \\ 0.3254 \\ 0.0638 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0.7917 \\ -0.2560 - 0.3675i \\ -0.1405 + 0.3802i \\ 0.0887 - 0.0231i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0.7917 \\ -0.2560 + 0.3675i \\ -0.1405 - 0.3802i \\ 0.0887 + 0.0231i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0006 \\ -0.0501 \\ 0.9987 \end{pmatrix}$$

Vi ser at de komplekse egenverdiene og egenvektorene er konjugerte av hverandre slik setning 4.10.4 sier. Vi ser også at egenverdiene er ordnet i avtagende rekkefølge: $|\lambda_1| > |\lambda_2| = |\lambda_3| > |\lambda_4|$.

Siden egenverdiene er forskjellige, vet vi at $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ danner en basis. Vi kan derfor skrive starttilstanden

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}$$

som en lineærkombinasjon

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + c_4\mathbf{v}_4$$

Vi skal bruke MATLAB til å finne koeffisientene c_1, c_2, c_3, c_4, men la oss først se hva som skjer når vi bruker A^{n-1} på ligningen ovenfor. Vi får

$$\mathbf{r}_n = A^{n-1}\mathbf{r}_1 = c_1A^{n-1}\mathbf{v}_1 + c_2A^{n-1}\mathbf{v}_2 + c_3A^{n-1}\mathbf{v}_3 + c_4A^{n-1}\mathbf{v}_4 =$$

$$c_1\lambda_1^{n-1}\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^{n-1}\mathbf{v}_2 + c_3\lambda_3^{n-1}\mathbf{v}_3 + c_4\lambda_4^{n-1}\mathbf{v}_4$$

Vi setter den største egenverdien λ_1^{n-1} utenfor en parentes

$$\mathbf{r}_n = \lambda_1^{n-1}\left(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n-1}\mathbf{v}_2 + c_3\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{n-1}\mathbf{v}_3 + c_4\left(\frac{\lambda_4}{\lambda_1}\right)^{n-1}\mathbf{v}_4\right)$$

Siden λ_1 har størst tallverdi av egenverdiene, vil alle faktorene $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n-1}$, $\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{n-1}$, $\left(\frac{\lambda_4}{\lambda_1}\right)^{n-1}$ gå mot null når n går mot uendelig. Det betyr at

$$\lim_{n\to\infty}\left(c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n-1}\mathbf{v}_2 + c_3\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{n-1}\mathbf{v}_3 + c_4\left(\frac{\lambda_4}{\lambda_1}\right)^{n-1}\mathbf{v}_4\right) = 0$$

Definerer vi

$$\boldsymbol{\sigma}(n) = c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n-1}\mathbf{v}_2 + c_3\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{n-1}\mathbf{v}_3 + c_4\left(\frac{\lambda_4}{\lambda_1}\right)^{n-1}\mathbf{v}_4\,,$$

kan vi derfor skrive

$$\mathbf{r}_n = \lambda_1^{n-1}(c_1\mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\sigma}(n))$$

der $\boldsymbol{\sigma}(n) \to 0$ når $n \to \infty$. Skriver vi ut komponentene og setter in $\lambda_1 = 1.0206$, får vi

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ u_n \end{pmatrix} = 1.0206^{n-1}\left(c_1\begin{pmatrix} 0.8472 \\ 0.4151 \\ 0.3254 \\ 0.0638 \end{pmatrix} + \boldsymbol{\sigma}(n)\right)$$

Dette betyr at når n blir stor, er veksten bestemt av den største egenverdien $\lambda_1 = 1.0206$, og fordelingen mellom komponentene er bestemt av den tilhørende egenvektoren $\mathbf{v}_1$. Som du ser, minner disse resultatene om det vi fikk i Eksempel 1, men vi har fått med en vekstfaktor i tillegg.

La oss nå finne konstantene c_1, c_2, c_3 og c_4. Dersom vi velger den opprinnelige begynnelsestilstanden

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}$$

får vi ligningen

$$\begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0.8472 \\ 0.4151 \\ 0.3254 \\ 0.0638 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0.7917 \\ -0.2560 - 0.3675i \\ -0.1405 + 0.3802i \\ 0.0887 - 0.0231i \end{pmatrix} +$$

$$+c_3 \begin{pmatrix} 0.7917 \\ -0.2560 + 0.3675i \\ -0.1405 - 0.3802i \\ 0.0887 + 0.0231i \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0006 \\ -0.0501 \\ 0.9987 \end{pmatrix}$$

Innfører vi matrisen

$$D = \begin{pmatrix} 0.8472 & 0.7917 & 0.7917 & 0 \\ 0.4151 & -0.2560 - 0.3675i & -0.2560 + 0.3675i & 0.0006 \\ 0.3254 & -0.1405 + 0.3802i & -0.1405 - 0.3802i & -0.0501 \\ 0.0638 & 0.0887 - 0.0231i & 0.0887 + 0.0231i & 0.9987 \end{pmatrix}$$

kan vi bruke MATLAB til å finne vektoren

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

ved å taste

```
>> c=D\r1
```

Vi får $c_1 = 436.59$, $c_2 = -107.29 - 49.34i$, $c_3 = -107.29 + 49.34i$, $c_4 = 193.72$. Legg merke til at koeffisientene c_2 og c_3 til de komplekse egenverdiene er konjugerte.

Vi har ennå ikke forklart hvor svingningene i figuren kommer fra. Det viser seg at de kommer fra de komplekse egenverdiene. Skriver vi den komplekse egenverdien λ_2 på polarform $\lambda_2 = re^{i\theta}$, ser vi at

$$\lambda_2^{n-1} = r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} = r^{n-1} \Big(\cos((n-1)\theta) + i \sin((n-1)\theta) \Big)$$

Cosinus- og sinus-leddene får uttrykket til å svinge, men i dette tilfellet vil svingningene dø ut etter hvert fordi $r < 1$ og $r^{n-1} \to 0$ når $n \to \infty$. ♣

Oppgaver til seksjon 4.11

1. Finn to følger $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ slik at

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + 3y_n \\ y_{n+1} &= 2x_n + 2y_n \end{aligned}$$

når $x_0 = 5$, $y_0 = -5$.

2. Finn funksjonene $x(t), y(t)$ slik at

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + 8y(t) \\ y'(t) &= 2x(t) + y(t) \end{aligned}$$

og $x(0) = 1, y(0) = 6$.

3. a) Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen $A = \begin{pmatrix} 1.1 & -0.2 \\ 0.1 & 0.8 \end{pmatrix}$

b) To dyreslag bor i det samme området. Dersom det er x_n og y_n dyr av hvert slag ett år, vil det året etter være

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1.1x_n - 0.2y_n \\ y_{n+1} &= 0.1x_n + 0.8y_n \end{aligned}$$

dyr av hvert slag. Finn uttrykk for x_n og y_n dersom $x_0 = 3000$, $y_0 = 1000$. Hva skjer med bestandene når n går mot uendelig?

4. I barnehagen har Viktoria og Emil fått hvert sitt glass saft med nøyaktig like mye saft til hver. Viktoria er imidlertid ikke helt fornøyd siden saften til Emil inneholder dobbelt så mye sukker som hennes. Glassene er ikke fullere enn at det går an å helle litt fra det ene over i det andre, og smart som hun er, får Viktoria med Emil på følgende lek: Hun heller $\frac{1}{9}$ av sin saft over i glasset til Emil, ber ham røre godt rundt og så helle den samme mengden saft tilbake i hennes glass slik at de igjen har like mye saft.

Blandeprosedyren ovenfor gjentas flere ganger. La x_n og y_n være sukkermengden i glassene til henholdsvis Viktoria og Emil etter at prosedyren er utført n ganger.

a) Vis at

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 0.9x_n + 0.1y_n \\ y_{n+1} &= 0.1x_n + 0.9y_n \end{aligned}$$

b) La M være matrisen slik at $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. Finn egenverdiene og egenvektorene til M.

c) Skriv $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ som en lineærkombinasjon av egenvektorer for M, og finn $M^n \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

d) Hvor mange ganger må blandeprosedyren utføres for at forholdet mellom sukkerinnholdet i Viktorias saft og Emils saft er minst 0.95?

5. I denne oppgaven er

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{9} \\ \frac{5}{9} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til M.

I resten av oppgaven skal vi studere en modell for hvordan en ufarlig infeksjonssykdom sprer seg i en befolkning. Vi deler befolkningen i to grupper — de som er immune for sykdommen og de som er mottagelige for smitte. De fleste som nylig har hatt sykdommen vil være immune, men mange vil miste immuniteten etter som tiden går.

I modellen ønsker vi å studere hvor mange som er immune, og hvor mange som er mottagelige for smitte etter 0, 10, 20, 30, ... år. Vi lar y_n være antall immune etter 10n år og x_n antall mottagelige ved samme tidspunkt. Vi har følgende observasjoner:

Av dem som er immune et år, vil $\frac{4}{9}$ fortsatt være immune 10 år senere, $\frac{1}{9}$ vil være døde og resten vil være mottagelige for smitte.

Av dem som er mottagelige for smitte et år, vil halvparten være immune 10 år senere, $\frac{1}{9}$ vil være døde og resten vil være mottagelige for smitte.

I løpet av en 10-årsperiode vil befolkningen få et tilskudd pga. fødsel og innvandring. Dette tilskuddet er $\frac{1}{6}$ av befolkningstallet ved begynnelsen av perioden, og ved slutten av perioden vil $\frac{1}{3}$ av de nye individene være immune og resten mottagelige for smitte.

b) Vis at

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

c) Anta at $x_0 = 8$ millioner og at $y_0 = 2$ milloner. Finn x_n og y_n.

d) Etter som tiden går vil prosentdelen av immune nærme seg en grense. Hva er denne grensen?

6. En oljemilliardær bestemmer seg for å satse på turisme. Hun kjøper 1 000 hytter på fjellet. Hyttene leies ut for ett år av gangen. Hytteeieren finner ut at 80% av hyttene som er leid ut ett år, også er leid ut året etter, mens 70% av hyttene som er tomme ett år, også er tomme neste år.

La x_n være antall utleide og y_n antall tomme hytter i år n.

a) Finn en matrise M slik at

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

b) Ett år er 550 hytter utleid. Hvor mange var utleid året før?

c) Finn egenverdiene og egenvektorene til M.

Det første året (år 0) er halvparten av hyttene leid ut mens resten står tomme.

d) Finn x_n og y_n.

e) Det første året er nettofortjenesten pr. utleid hytte 10 000 kroner, mens utgiftene forbundet med en tom hytte er 4 000 kroner. På grunn av elde og slitasje øker utgiftene for tomme hytter med 10% per år, mens nettofortjenesten for utleide hytter ligger stabilt på 10 000 kroner i året. La P_n være nettofortjeneste i år n, dvs. inntekter minus utgifter. Finn P_n uttrykt ved n og begrunn at hytteeieren etter hvert taper penger.

7. Det var en gang en bestand av biller som levde i en gammel verneverdig trebygning. Vi deler billebestanden inn i tre aldersgrupper: *nyfødte* (0 uker gamle), *voksne* (1 uke gammel) og *gamle* (2 uker gamle). La x_n, y_n, z_n være henholdsvis antall nyfødte, voksne og gamle biller ved tiden $t = n$, der tiden regnes i uker. Vi antar at alle billene som er nyfødte en uke, overlever til uken etter, men at bare halvparten av de voksne billene overlever til neste uke, og at ingen gamle biller lever en uke til. En voksen bille gir i gjennomsnitt opphav til 3 nye biller som blir født uken etter, mens en gammel bille i gjenomsnitt gir opphav til 4 nye biller som blir født uken etter.

a) Finn en matrise M slik at

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

b) Finn egenverdiene og egenvektorene til M.

c) Anta at det er 24 nyfødte, ingen voksne og 6 gamle biller i trebygningen ved $t = 0$. Hvor mange biller er det i hver aldersgruppe n uker senere?

8. I en by finnes det tre aviser, en skandaleavis A, en rimelig seriøs avis B og en svært seriøs avis C. I løpet av fem år skjer det følgende forandringer:

Avisene A og C får et antall nye kjøpere (som ikke har kjøpt noen avis tidligere) tilsvarende 10% av det antall kjøpere de hadde ved starten av perioden, mens avis C får en tilvekst av nye kjøpere på 20%. 10% av leserne av avis A slutter med A og går over til B. 10% av leserne av B slutter med B og går over til A og en annen gruppe på 10% går over til C. 10% av kjøperne av C slutter med C og begynner å kjøpe B. Ellers beholder alle kjøperne sin gamle avis.

La x_n, y_n, z_n være salgstallene for henholdsvis avis A, B og C i året $5n$, for $n = 1, 2, 3\ldots$.

a) Finn en matrise M slik at

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

b) Finn egenverdiene og egenvektorene til M.

c) Finn x_n, y_n, z_n uttrykt ved x_0, y_0, z_0 og n. Vis at forholdet mellom salgstallene nærmer seg grenser som er uavhengig av starttilstanden. Finn $k_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ og $k_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{z_n}$.

9. To fiskeslag lever i samme innsjø. Fiskeslag II er avhengig av fiskeslag I for å opprettholde bestanden. Dersom $x(t)$ er antall fisk av slag I ved tiden t, og $y(t)$ er antall fisk av slag II ved tiden t, regner vi at

$$x'(t) = 0.02x(t) - 0.03y(t)$$

$$y'(t) = 0.01x(t) - 0.02y(t)$$

a) Vis at egenverdiene og egenvektorene til matrisen $A = \begin{pmatrix} 0.02 & -0.03 \\ 0.01 & -0.02 \end{pmatrix}$ er $\lambda_1 = 0.01, \lambda_2 = -0.01, \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) La $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ og skriv $\mathbf{r}(t) = c_1(t)\mathbf{v}_1 + c_2(t)\mathbf{v}_2$. Vis at c_1 og c_2 tilfredsstiller differensialligningene

$$c_1'(t) = 0.01c_1(t)$$
$$c_2'(t) = -0.01c_2(t)$$

c) Anta at $x(0) = 5\,000$ og $y(0) = 1\ 000$. Finn $x(t)$ og $y(t)$. Hvordan går det med forholdet $\frac{x(t)}{y(t)}$ mellom antall fisk av slag I og antall fisk av slag II når t blir stor?

d) Bruk MATLAB til å plotte $x(t)$ og $y(t)$ i samme koordinatsystem.

10. To arter, et rovdyr og et byttedyr, lever i samme område. La $x(t)$ være antall rovdyr og $y(t)$ antall byttedyr ved tiden t (t måles i år). Anta at $x(0) = 500, y(0) = 1000$. Vi skal betrakte to enkle modeller for $x(t)$ og $y(t)$.

a) I den første modellen antar vi at x og y tilfredsstiller

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + y(t) \\ y'(t) &= -x(t) + y(t) \end{aligned}$$

Hva blir $x(t)$ og $y(t)$ i dette tilfellet (husk at $e^{a+ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$)?

b) I den andre modellen antar vi at x og y tilfredsstiller

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2x(t) + 4y(t) \\ y'(t) &= x(t) - 2y(t) \end{aligned}$$

Hva blir $x(t)$ og $y(t)$ da?

c) Observasjonene våre tyder på at det på et visst tidspunkt ikke er flere byttedyr igjen. Hvilken modell passer med disse observasjonene? Hvor mange måneder tar det ifølge modellen før dette skjer? I den andre modellen vil antall rovdyr og antall byttedyr etter hvert stabilisere seg seg på visse verdier. Bestem disse verdiene.

11. En by har nettopp innført et system med "bysykler" der man kan låne en sykkel fra et sykkelstativ og levere den fra seg ved et annet (eller ved det samme om man bare skal en tur i nærområdet). Foreløpig har byen 4 stativer som vi kaller X, Y, Z, U. Myndighetene er interessert i å undersøke lånemønsteret for syklene,

Utgangspunkt	Prosentfordeling neste måned				
	i X	i Y	i Z	i U	ute av drift
X	40%	20%	20%	10%	10%
Y	10%	40%	20%	20%	10%
Z	10%	20%	25%	25%	20%
U	30%	20%	20%	20%	10%

og har derfor en månedlig undersøkelse av hvor de forskjellige syklene befinner seg. Denne undersøkelsen viser at av de syklene som befant seg i stativ X en måned, befinner 40% seg i X måneden etter, 20% befinner seg i Y, 20% i Z og 10% i U, mens 10% er ute av drift fordi de enten er forsvunnet eller inne til vedlikehold. Tilsvarende tall for syklene som opprinnelig var i Y, Z og U, fremgår av tabellen ovenfor. I forbindelse med undersøkelsen får hvert stativ påfyll med nye/reparerte sykler. Påfyllet tilsvarer 15% av antall sykler som står i stativet.

a) La x_n, y_n, z_n, u_n være antall sykler i henholdsvis X, Y, Z, U rett etter den n-te undersøkelsen (og rett etter påfyllet av nye/reparerte sykler). Forklar at

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= 0.46x_n + 0.115y_n + 0.115z_n + 0.345u_n \\
y_{n+1} &= 0.23x_n + 0.46y_n + 0.23z_n + 0.23u_n \\
z_{n+1} &= 0.23x_n + 0.23y_n + 0.2875z_n + 0.23u_n \\
u_{n+1} &= 0.115x_n + 0.23y_n + 0.2875z_n + 0.23u_n
\end{aligned}$$

b) Skriv en m-fil som gitt x_1, y_1, z_1, u_1 returnerer x_n, y_n, z_n, u_n for n fra 1 til 50.

c) Velg $x_1 = y_1 = z_1 = u_1 = 100$, og bruk MATLAB til å tegne følgene $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$, $\{u_n\}$ i samme koordinatsystem.

d) Lag en ny MATLAB-figur der du plotter følgene $\{\frac{x_n}{1.0071^{n-1}}\}$, $\{\frac{y_n}{1.0071^{n-1}}\}$, $\{\frac{z_n}{1.0071^{n-1}}\}$, $\{\frac{u_n}{1.0071^{n-1}}\}$ i samme koordinatsystem.

e) Gjenta plottingen i c) og d), men bruk starttilstanden $x_1 = 200$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, $u_1 = 200$. Ser du et mønster? Eksperimenter gjerne med andre startverdier.

f) La

$$\mathbf{w}_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ u_n \end{bmatrix}$$

være fordelingen av sykler den n-te måneden. Forklar at $\mathbf{w}_{n+1} = A\mathbf{w}_n$ der A er matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0.46 & 0.115 & 0.115 & 0.345 \\ 0.23 & 0.46 & 0.23 & 0.23 \\ 0.23 & 0.23 & 0.2875 & 0.23 \\ 0.115 & 0.23 & 0.2875 & 0.23 \end{bmatrix}$$

Forklar også hvorfor $\mathbf{w}_n = A^{n-1}\mathbf{w}_1$.

g) Bruk MATLAB til å vise at matrisen A ovenfor har fire egenverdier λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 med tilhørende egenvektorer $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$. Sørg for å ordne rekkefølgen slik at λ_1 er egenverdien med størst tallverdi. (NB: MATLAB gir av og til egenvektorer der *alle* komponentene er negative. For å få en egenvektor som er greiere å arbeide med, kan du da bare fjerne alle minustegnene i denne vektoren.)

h) Vis at egenvektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ til A danner en basis for $\mathbf{R}^4$, dvs. at de er lineært uavhengige og utspenner hele $\mathbf{R}^4$ (bruk gjerne MATLAB).

i) Velg

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \\ 100 \end{bmatrix}$$

og skriv denne vektoren som en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ (bruk gjerne MATLAB). Finn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A^{n-1}\mathbf{w}_1}{\lambda_1^{n-1}}$$

Sammenlign med resultatene i oppgave 1c) og d). Hva regner du med å få dersom du velger en annen starttilstand $\mathbf{w}_1$?

4.12 Spektralteoremet

I denne seksjonen skal vi bevise spektralteoremet for symmetriske matriser. Dette er et av de viktigste resultatene i lineær algebra og det er også modell for mer generelle resultater i andre deler av matematikken. Beviset er i seg selv ikke vanskeligere enn andre vi allerede har vært borti, men det er ganske langt fordi vi ennå ikke har gjort alle forberedelsene vi trenger. Vær oppmerksom på at beviset bygger på seksjon 4.7, og har du ikke lest den seksjonen før, bør du gjøre det nå.

Formuleres for også for normale matriser?

La oss først minne om hva spektralteoremet sier.

Teorem 4.12.1 (Spektralteoremet for symmetriske matriser) *Anta at A er en symmetrisk $n \times n$-matrise. Da er alle egenverdiene til A reelle, og det finnes en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer til A.*

Vi skal først vise at alle egenverdiene og egenvektorene til en symmetrisk matrise er reelle. Nøkkelen er en enkel setning som vi litt paradoksalt må formulere for komplekse vektorer slik at vi senere kan bruke den til å vise at egenvektorene er reelle (eller — mer presist — kan velges til å være reelle)!

Setning 4.12.2 *Anta at A er en reell $n \times n$-matrise og at $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ er to komplekse søylevektorer. Da er*

$$(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A^T\mathbf{y})$$

Bevis: For alle søylevektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ er

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T\overline{\mathbf{v}}$$

der produktet på venstresiden er et skalarprodukt mens produktet på høyresiden er et matriseprodukt (ser du ikke dette med det samme, så skriv ut begge sidene av formelen og husk at komplekse skalarprodukter inneholder en komplekskonjugering i annen faktor). Bruker vi denne formelen samt regnereglene for transponering og matriseprodukter, får vi

$$(A\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} = (A\mathbf{x})^T\overline{\mathbf{y}} = (\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T)\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{x}^T(A^T\overline{\mathbf{y}})$$

Siden A er reell, er $A^T = \overline{A^T}$, og dermed får vi videre

$$\mathbf{x}^T(A^T\overline{\mathbf{y}}) = \mathbf{x}^T(\overline{A^T\mathbf{y}}) = \mathbf{x}\cdot(A^T\mathbf{y})$$

$\square$

Bemerkning: Argumentet ovenfor kan være litt vanskelig å lese fordi notasjonene for matriseprodukt og skalarprodukt er så like. I mer avanserte bøker er det derfor vanlig å bruke andre måter å angi skalarprodukt på, f.eks. $\langle\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$ istedenfor $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$. Med denne notasjonen kan resultatet ovenfor skrives $\langle A\mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \langle\mathbf{x}, A^T\mathbf{y}\rangle$ og nå blir det kanskje enklere å se hva setningen sier — vi kan føre matrisen A over på den andre siden av skalarproduktet forutsatt at vi transponerer den.

Vi tar med et viktig korollar av setningen ovenfor:

Korollar 4.12.3 *En reell $n\times n$-matrise er symmetrisk hvis og bare hvis*

$$(A\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot(A\mathbf{y})$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Bevis: Dersom A er symmetrisk, er

$$(A\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot(A^T\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot(A\mathbf{y})$$

ifølge setningen ovenfor.

Dersom A *ikke* er symmetrisk, finnes det minst ett par av indekser (i,j) slik at den (i,j)-te komponenten a_{ij} til A er forskjellig fra den (i,j)-te komponenten a_{ji} til A^T. Velger vi $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$ og $\mathbf{y} = \mathbf{e}_j$, får vi

$$(A\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} = a_{ji} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{x}\cdot(A\mathbf{y}) = a_{ij}$$

Altså er $(A\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} \neq \mathbf{x}\cdot(A\mathbf{y})$. $\square$

Vi kan nå vise det første resultatet vi er på jakt etter.

Setning 4.12.4 *Dersom A er en symmetrisk (reell) $n\times n$-matrise, så er alle egenverdiene til A reelle. Til enhver reell egenverdi hører det en reell egenvektor.*

Bevis: Anta at λ er en (muligens kompleks) egenverdi for A med en (muligens kompleks) egenvektor $\mathbf{v}$. Da er

$$A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = (\lambda\mathbf{v})\cdot\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = \lambda|\mathbf{v}|^2$$

På den annen side er (husk at vi må bruke komplekse skalarprodukter siden λ og $\mathbf{v}$ kan være komplekse)

$$A\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot(A\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot(\lambda\mathbf{v}) = \overline{\lambda}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = \overline{\lambda}|\mathbf{v}|^2$$

(se punkt f) i setning 1.3.1 dersom du ikke skjønner hvor komplekskonjugeringen kommer fra). Dermed har vi $\lambda|\mathbf{v}|^2 = \overline{\lambda}|\mathbf{v}|^2$, og forkorter vi med $|\mathbf{v}|^2$, får vi $\lambda = \overline{\lambda}$ som viser at λ er reell. Det gjenstår å vise at det finnes en *reell* egenvektor med egenverdi λ. Dette kan gjøres på flere måter — det enkleste er kanskje å observere at siden $\det(\lambda I_n - A) = 0$, så har ligningen $(\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ifølge teorien vår en ikke-null, reell løsning. □

Den neste setningen er det første spede skrittet på veien mot eksistensdelen av spektralteoremet — den viser at en symmetrisk matrise i hvert fall har én (reell) egenvektor.

Setning 4.12.5 *Enhver symmetrisk matrise A har minst én (reell) egenvektor.*

Bevis: Ifølge algebraens fundamentalteorem (*Kalkulus*, teorem 3.5.1) har det karakteristiske polynomet $P_A(\lambda)$ minst én rot. Det betyr at A har minst én egenverdi, og ifølge setningen ovenfor er denne egenverdien reell og har en reell egenvektor. □

Denne setningen er brekkstangen vi trenger for å komme igang med et induksjonsbevis for spektralteoremet. Beviset går ved induksjon på dimensjonen til rommet som matrisen virker på. Disse rommene er generelle underrom av $\mathbb{R}^n$, og for å få induksjonsbeviset til å fungere, må vi først generalisere symmetribegrepet til underrom.

Symmetriske lineæravbildninger

Husk (fra seksjon 1.9) at en *lineæravbildning* fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ er en funksjon $\mathbf{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ slik at

(i) $\mathbf{T}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{T}(\mathbf{x})$ for alle $c \in \mathbb{R}$ og alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

(ii) $\mathbf{T}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{T}(\mathbf{y})$ for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

Til enhver slik lineæravbildning finnes det en matrise A slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (se setning 1.9.4), og vi har derfor stort sett arbeidet med matriser istedenfor lineæravbildninger. I denne seksjonen trenger vi imidlertid å arbeide med lineæravbildninger definert på underrom av $\mathbb{R}^n$, og da er det tungvint å bruke matriser istedenfor lineæravbildninger.

Vi begynner med å generalisere begrepet lineæravbildning til underrom.

Definisjon 4.12.6 *Anta at H er et underrom av $\mathbb{R}^n$. En funksjon $\mathbf{T} : H \to H$ kalles en* lineæravbildning *dersom*

(i) $\mathbf{T}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{T}(\mathbf{x})$ *for alle* $c \in \mathbb{R}$ *og alle* $\mathbf{x} \in H$

(ii) $\mathbf{T}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{T}(\mathbf{y})$ *for alle* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$

Vi skal ofte arbeide med lineæravbildninger som i utgangspunktet er definert på en større mengde enn H (gjerne på hele $\mathbb{R}^n$). Vi kan oppfatte disse som lineæravbildninger fra H til H dersom $\mathbf{T}(\mathbf{x}) \in H$ for alle $\mathbf{x} \in H$. I så fall sier vi at $\mathbf{T}$ *avbilder H inn i H*.

Med korollar 4.12.3 som inspirasjon er det lett å definere *symmetriske* lineæravbildninger.

Definisjon 4.12.7 *En lineæravbildning* $\mathbf{T} : H \to H$ *kalles* symmetrisk *dersom*

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{y}) \qquad \textit{for alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$$

Det er også lett å generalisere begrepene egenverdi og egenvektor til underrom:

Definisjon 4.12.8 *En ikke-null vektor* $\mathbf{v} \in H$ *kalles en* egenvektor *for lineæravbildningen* $\mathbf{T} : H \to H$ *dersom det finnes et tall* $\lambda \in \mathbb{R}$ *slik at* $\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. *Tallet λ kalles en egenverdi for* $\mathbf{T}$.

Bemerkning: Legg merke til at vi nå bare tillater *reelle* egenverdier og egenvektorer. Det er for å slippe å snakke om den komplekse versjonen av underrommet H. Siden vi for øyeblikket kun er interessert i symmetriske lineæravbildninger (som bare har reelle egenvektorer og egenverdier), taper vi ikke noe på å holde oss til det reelle tilfellet.

Det neste resultatet generaliserer setning 4.12.5 til symmetriske lineæravbildninger på underrom. Beviset kan se ut som et skittent triks, men det er faktisk eksempel på en generell teknikk (men hva er en matematisk teknikk annet et skittent triks som brukes mer enn én gang?) Synes du beviset er mysteriøst, kan det være lurt å ta en kikk på bemerkningen som følger etter det (men bemerkningen forutsetter nok at du har prøvd å lese beviset først!)

Setning 4.12.9 *Anta at* $H \neq \{\mathbf{0}\}$ *er et underrom av* $\mathbb{R}^n$. *Da har enhver symmetrisk lineæravbildning* $\mathbf{T} : H \to H$ *minst én egenvektor.*

Bevis: Velg en ortonormal basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ for H. Vi kan skrive bildene $\mathbf{T}(\mathbf{v}_1)$, $\mathbf{T}(\mathbf{v}_2)$, ..., $\mathbf{T}(\mathbf{v}_m)$ som lineærkombinasjoner av basisvektorene:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(\mathbf{v}_1) &= c_{11}\mathbf{v}_1 + c_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{m1}\mathbf{v}_m \\
\mathbf{T}(\mathbf{v}_2) &= c_{12}\mathbf{v}_1 + c_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{m2}\mathbf{v}_m \\
\vdots \quad &\;\vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\
\mathbf{T}(\mathbf{v}_m) &= c_{1m}\mathbf{v}_1 + c_{2m}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{mm}\mathbf{v}_m
\end{aligned}$$

Siden basisen er ortonormal, vet vi fra setning 4.10.7 at

$$c_{ij} = \mathbf{T}(\mathbf{v}_j) \cdot \mathbf{v}_i$$

Tilsvarende er

$$c_{ji} = \mathbf{T}(\mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{v}_j$$

Siden $\mathbf{T}$ er symmetrisk, er $\mathbf{T}(\mathbf{v}_j) \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{T}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{T}(\mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{v}_j$. Det betyr at $c_{ji} = c_{ij}$, og følgelig er matrisen

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{pmatrix}$$

symmetrisk. Vi vet fra setning 4.12.5 at C har minst én reell egenverdi λ med tilhørende (reell) egenvektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Dette betyr at $C\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, og skriver vi ut denne ligningen komponentvis, får vi

$$\begin{aligned}
x_1c_{11} + x_2c_{12} + \ldots + x_mc_{1m} &= \lambda x_1 \\
x_1c_{21} + x_2c_{22} + \ldots + x_mc_{2m} &= \lambda x_2 \\
\vdots \qquad\qquad &\;\vdots \;\;\vdots \\
x_1c_{m1} + x_2c_{m2} + \ldots + x_mc_{mm} &= \lambda x_m
\end{aligned}$$

Vi er nå kommet til poenget som er å vise at $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_m\mathbf{v}_m$ er en egenvektor for $\mathbf{T}$ med egenverdi λ. Dette er bare et regnestykke (legg merke til hvordan vi bruker ligningene ovenfor):

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(\mathbf{v}) &= x_1\mathbf{T}(\mathbf{v}_1) + x_2\mathbf{T}(\mathbf{v}_2) + \cdots + x_m\mathbf{T}(\mathbf{v}_m)\\
&= \quad x_1(c_{11}\mathbf{v}_1 + c_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{m1}\mathbf{v}_m)\\
&\quad +x_2(c_{12}\mathbf{v}_1 + c_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{m2}\mathbf{v}_m)\\
&\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\\
&\quad +x_m(c_{1m}\mathbf{v}_1 + c_{2m}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{mm}\mathbf{v}_m)\\
&= \quad (x_1c_{11} + x_2c_{12} + \ldots + x_mc_{1m})\mathbf{v}_1\\
&\quad +(x_1c_{21} + x_2c_{22} + \ldots + x_mc_{2m})\mathbf{v}_2\\
&\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\\
&\quad +(x_1c_{m1} + x_2c_{m2} + \ldots + x_mc_{mm})\mathbf{v}_m\\
&= \lambda x_1\mathbf{v}_1 + \lambda x_2\mathbf{v}_2 \ldots + \lambda x_m\mathbf{v}_m = \lambda\mathbf{v}
\end{aligned}$$

Dette viser at $\mathbf{v}$ er en egenvektor med egenverdi λ, og dermed er beviset fullført. □

Bemerkning: Ved første øyekast kan beviset ovenfor se ut som et umotivert regnestykke som på mystisk vis ender opp med det svaret vi ønsker oss. Beviset har imidlertid en klar idé: Vi konstruerer en matrise C slik at den tilhørende lineæravbildningen (la oss kalle den $\hat{\mathbf{T}}$) oppfører seg på akkurat samme måte overfor basisen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m$ i $\mathbb{R}^m$ som $\mathbf{T}$ oppfører seg overfor basisen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ i H. På grunn av setning 4.12.5 vet vi at $\hat{\mathbf{T}}$ har en egenvektor $\mathbf{x}$. Vi konstruerer så en vektor $\mathbf{v}$ som forholder seg på akkurat samme måte til basisen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ som $\mathbf{x}$ forholder seg til basisen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m$. Da er det ikke så merkelig at $\mathbf{v}$ er en egenvektor for $\mathbf{T}$ med samme egenverdi som $\mathbf{x}$.

Vi er nå kommet frem til de to siste resultatene vi trenger før vi kan gå løs på selve beviset for spektralteoremet. Det første skal hjelpe oss med dimensjonsregnskapet.

Setning 4.12.10 *Anta at $H \neq \{\mathbf{0}\}$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$, og la $\mathbf{a}$ være en ikke-null vektor i H. Da er*

$$H_{\mathbf{a}^\perp} = \{\mathbf{x} \in H \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 0\}$$

et underrom av $\mathbb{R}^n$, og $\dim(H_{\mathbf{a}^\perp}) = \dim(H) - 1$. Dersom $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\ldots$, $\mathbf{v}_k$ er en basis for $H_{\mathbf{a}^\perp}$, så er $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\ldots$, $\mathbf{v}_k$, $\mathbf{a}$ en basis for H (dersom $H_{\mathbf{a}^\perp} = \{\mathbf{0}\}$ betyr dette at $\mathbf{a}$ alene utgjør en basis for H).

Bevis: At $H_{\mathbf{a}^\perp}$ er et underrom, sjekkes på akkurat samme måte som i eksempel 4.7.2. Vi overlater tilfellet der $H_{\mathbf{a}^\perp} = \{\mathbf{0}\}$ til leserne, og antar at $\mathbf{v}_1$,

$\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ er en basis for $H_{\mathbf{a}^\perp}$. Vår jobb er å bevise at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{a}$ er en basis for H. Vi må da sjekke at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{a}$ er lineært uavhengige og utspenner hele H.

Vi begynner med uavhengigheten. Vi må vise at dersom

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k + d\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

så er $c_1 = c_2 = \cdots c_k = d = 0$. Tar vi skalarproduktet med $\mathbf{a}$ på begge sider av formelen ovenfor og bruker at $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_i = 0$ (siden $\mathbf{v}_i \in H_{\mathbf{a}^\perp}$), får vi

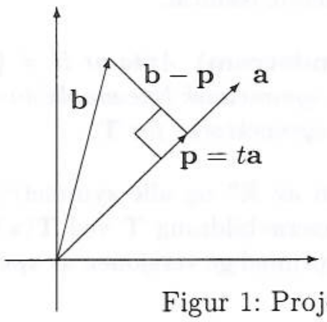
$$d|\mathbf{a}|^2 = 0$$

Siden $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, betyr dette at $d = 0$. Dermed står vi igjen med

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

og siden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ er lineært uavhengig, betyr dette at $c_1 = c_2 = \cdots c_k = 0$. Vi har altså vist at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{a}$ er lineært uavhengige.

Det gjenstår å vise at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{a}$ utspenner hele H, dvs. at enhver $\mathbf{b} \in H$ kan skrives som en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{a}$. Gitt en $\mathbf{b} \in H$, lar vi $\mathbf{p}$ være projeksjonen av $\mathbf{b}$ ned på $\mathbf{a}$ (se figur 1 og husk setning 1.2.2).



Figur 1: Projeksjonen $\mathbf{p}$ av $\mathbf{b}$ ned på $\mathbf{a}$

Legg merke til at siden $\mathbf{p} = t\mathbf{a}$ for et tall t, så er $\mathbf{b} - \mathbf{p} = \mathbf{b} + (-t)\mathbf{a}$ med i H. I tillegg står $\mathbf{b} - \mathbf{p}$ per konstruksjon normalt på $\mathbf{a}$, og er følgelig et element i $H_{\mathbf{a}^\perp}$. Siden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ er en basis for $H_{\mathbf{a}^\perp}$, finnes det dermed tall $c_1, c_2, \ldots, c_k$ slik at

$$\mathbf{b} - \mathbf{p} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$$

Siden $\mathbf{p}$ er parallell med $\mathbf{a}$, finnes det som allerede nevnt et tall t slik at $\mathbf{p} = t\mathbf{a}$. Dermed er

$$\mathbf{b} = t\mathbf{a} + c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$$

Dette viser at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{a}$ utspenner hele H, og beviset er fullført. □

Det neste resultatet peker på en viktig egenskap som skiller symmetriske lineæravbidninger fra generelle lineæravbildninger, og som er helt nødvendig for å få beviset for spektralteoremet til å fungere.

Setning 4.12.11 *La H være et underrom av $\mathbb{R}^n$ og anta at $\mathbf{T} : H \to H$ er en symmetrisk lineæravbildning. Anta videre at $\mathbf{a}$ er en egenvektor for T, og la*

$$H_{\mathbf{a}^\perp} = \{\mathbf{x} \in H \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 0\}$$

være det ortogonale komplementet til $\mathbf{a}$ i H. Da avbilder T underrommet $H_{\mathbf{a}^\perp}$ inn i seg selv, dvs. at dersom $x \in H_{\mathbf{a}^\perp}$, så er også $T(\mathbf{x}) \in H_{\mathbf{a}^\perp}$.

Bevis: Anta at $x \in H_{\mathbf{a}^\perp}$. Da er $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 0$, og siden $\mathbf{T}$ er symmetrisk, har vi

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{a}) = \mathbf{x} \cdot (\lambda \mathbf{a}) = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) = 0$$

der λ er egenverdien til $\mathbf{a}$. Dette viser at $T(\mathbf{x}) \in H_{\mathbf{a}^\perp}$. □

Bevis for spektralteoremet

Vi er nå klare for å bevise spektralteoremet. For å få induksjonsargumentet vårt til å fungere, må vi bevise et litt mer generelt resultat:

Teorem 4.12.12 (Spektralteoremet for underrom) *Anta at $H \neq \{\mathbf{0}\}$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$, og at $\mathbf{T} : H \to H$ er en symmetrisk lineæravbildning. Da har H en ortonormal basis som består av egenvektorer for $\mathbf{T}$.*

Bemerkning: Siden $H = \mathbb{R}^n$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$ og alle symmetriske $n \times n$-matriser A definerer en symmetrisk lineæravbildning $\mathbf{T}$ ved $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, ser vi at teoremet ovenfor medfører den opprinnelige versjonen av spektralteoremet i 4.12.1.

Bevis for teorem 4.12.12: Vi beviser teoremet ved induksjon på dimensjonen til underrommet H. Anta først at H har dimensjon 1. Da har H en basis som bare består av én vektor $\mathbf{v}$. Vi kan anta at $|\mathbf{v}| = 1$ (hvis ikke bytter vi bare ut $\mathbf{v}$ med $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$). Siden $\mathbf{T}(\mathbf{v}) \in H$, må det finnes et tall c slik at $\mathbf{T}(\mathbf{v}) = c\mathbf{v}$. Men da er $\mathbf{v}$ en egenvektor med egenverdi c, og basisen som bare består av $\mathbf{v}$, er derfor en ortonormal basis av egenvektorer (ortogonaliteten er trivielt oppfylt siden $\mathbf{v}$ ikke har noen basiskompanjonger å stå ortogonalt på).

Anta så at teoremet gjelder for alle underrom med dimensjon m og at H har dimensjon $m + 1$. Ifølge setning 4.12.9 har en symmetrisk lineæravbildning $\mathbf{T} : H \to H$ i hvert fall én egenvektor $\mathbf{a}$ som vi kan velge til å ha lengde 1. Ifølge setning 4.12.11 avbilder T det ortogonale komplementet $H_{\mathbf{a}^\perp}$ inn i seg selv. Setning 4.12.10 forteller oss at $H_{\mathbf{a}^\perp}$ har dimensjon m, og ifølge induksjonsantagelsen har dermed $H_{\mathbf{a}^\perp}$ en ortonormal basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ av egenvektorer for $\mathbf{T}$. Ifølge setning 4.12.10 er da $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{a}$ en basis for H, og den består åpenbart bare av egenvektorer. Siden $\mathbf{a}$ står ortogonalt på alle vektorer i $H_{\mathbf{a}^\perp}$ (og dermed spesielt på $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$), er basisen ortonormal. □

Oppgaver til seksjon 4.12

1. En matrise kalles *skjevtsymmetrisk* dersom $A^T = -A$. Vis at alle egenvediene til en skjevtsymmetrisk matrise er imaginære (dvs. at de er komplekse tall på formen $z = ib$).

2. En kvadratisk matrise U kalles *ortogonal* dersom $U^{-1} = U^T$. Vis at dersom λ er en (reell eller kompleks) egenverdi for U, så er $|\lambda| = 1$. (*Hint:* Anta at $\mathbf{v}$ er en egenvektor med egenverdi λ, og regn ut $U\mathbf{v} \cdot U\mathbf{v}$ på to forskjellige måter.)

3. Anta at A er en $m \times n$-matrise.

a) Vis at $B = A^T A$ er en symmetrisk $n \times n$-matrise.

b) Vis at alle egenverdiene$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ til B er ikke-negative.

c) Sett $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ og vis at det finnes en ortonormal basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ slik at

$$(A\mathbf{v}_i) \cdot (A\mathbf{v}_j) = \begin{cases} \mu_i^2 & \text{hvis } i = j \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Tallene $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ kalles *singulærverdiene* til A.