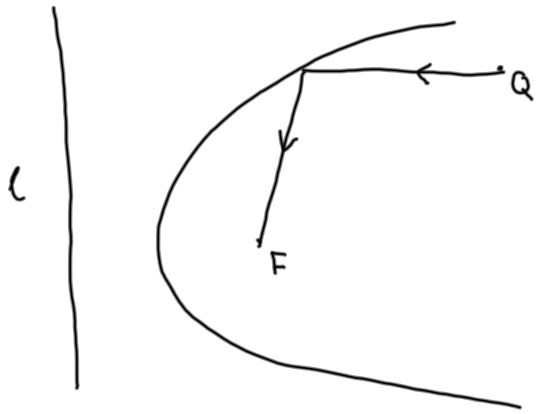
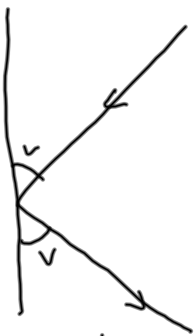
Torstein Nilssen
E-post: torsteka@math.uio.no
Kontor: 513 5. etasje NHAs Hus

Parabler (refleksjonsegenskapen)

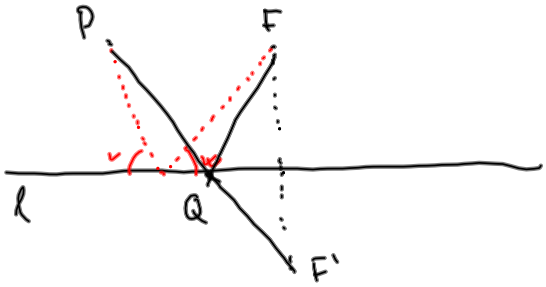


Tre ingredienser:

1: Innfallsvinkel = Utfallsvinkel: Lys reflekteres i et plan med samme innfallsvinkel som utfallsvinkel



2: Korteste vei fra punkt til et annet gjennom en linje, er ved å gjøre vinklene like

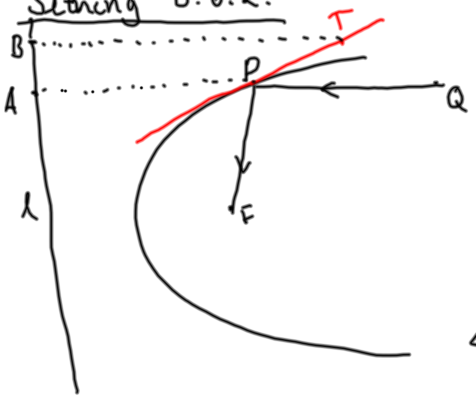


$$|QF| = |QF'|$$

$|PQ| + |QF| = |PQ| + |QF'| = |PF'|$ når Q er midtpunktet av projeksjonene av P og F på ℓ.

3: Punktene utenfor parabelen er nærmere l enn F

Setning 3.6.2.



Holder å vise at veien fra Q til F gjennom tangentlinja, er gjennom P.

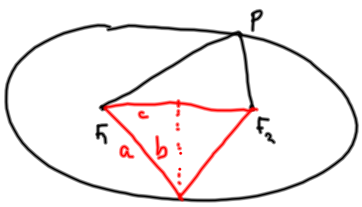
$$|QP| + |PF| < |QT| + |TF|$$

$$|QP| + |PF| = |QP| + |AP| = |QA|$$

$$< |QT| + |TB| \le |QT| + |TF|$$

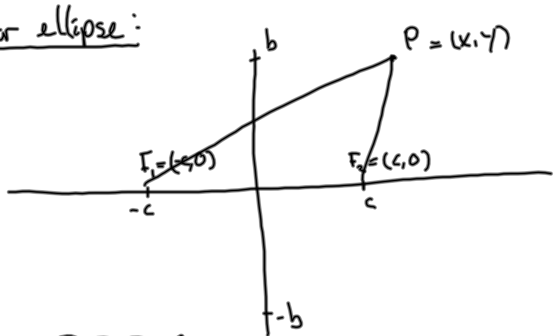
siden $|TB| < |TF|$

Ellipser: Gitt punkter F_1 og F_2 i planet, består ellipsen av alle punkter P slik at $|F_1P| + |PF_2| = 2a$



$a^2 = b^2 + c^2$

Formel for ellipse:



$|F_1P| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$

$|PF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

Vil ha $|F_1P| + |PF_2| = 2a$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = -\sqrt{(x-c)^2+y^2} + 2a$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$\cancel{x^2} + 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2} = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \cancel{x^2} - 2xc + \cancel{c^2} + \cancel{y^2}$$

$$4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 = (a^2 - xc)^2$$

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$a^2x^2 - \cancel{a^2 2xc} + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - \cancel{2a^2xc} + x^2c^2$$

$$\underbrace{(a^2-c^2)}_{b^2}x^2 + a^2y^2 = a^2\underbrace{(a^2-c^2)}_{b^2}$$

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \Big| \frac{1}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Setning 3.6.3:

For $a > b$ beskriver likningen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en ellipse med brennpunkt $(-c, 0)$ og $(c, 0)$ hvor $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

(For $a < b$ er brennpunkt $(0, -c)$ og $(0, c)$, $c = \sqrt{b^2 - a^2}$)

Forflyttet senter: $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$

gir tilsvarende ellipse med senter i (m, n)

Parametrisering:

for $t \in [0, 2\pi]$, $\vec{r}(t) = (m + a\cos t)\vec{i} + (n + b\sin t)\vec{j}$

siden $x = m + a\cos t$, $y = n + b\sin t$,

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = \frac{(a\cos t)^2}{a^2} + \frac{(b\sin t)^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

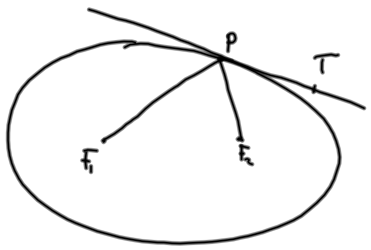
Refleksjonsegenskapen til ellipser:

En stråle fra F_1 som reflekteres i ellipsen vil treffe F_2

1: Innfallsvinkel = Utfallsvinkel

2: Korteste vei mellom to punkter gjennom en linje er ved innfallsvinkel = utfallsvinkel.

3: Dersom T ikke er innenfor ellipsen, er $|TF_1| + |TF_2| > 2a$



Holder å vise at

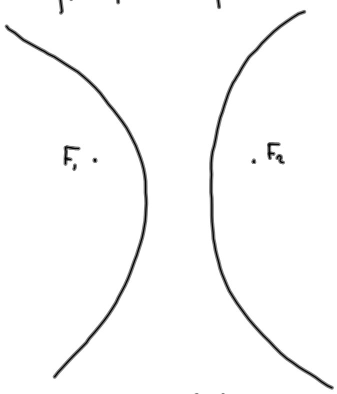
$|F_2P| + |PF_1| < |F_2T| + |TF_1|$

Men $|F_2P| + |PF_1| = 2a$, og

$|TF_1| + |TF_2| > 2a$ ■

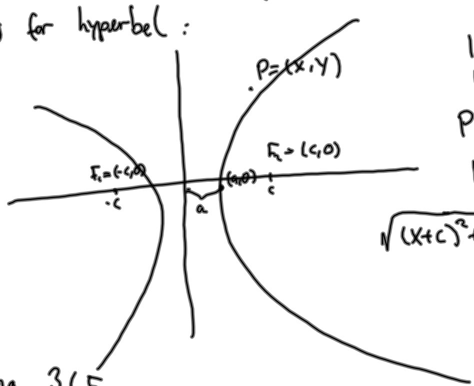
Hyperbler: F_1 og F_2 to punkter i planet. Vi lar hyperbelen bestå av alle punkter P slik at

$$\big||F_1P| - |PF_2|\big| = 2a \quad (\text{dvs } |F_1P| - |PF_2| = \pm 2a)$$



$b := \sqrt{c^2 - a^2}$

Likning for hyperbel:



$|F_1P| = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$

$|F_2P| = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$

P ligger på hyperbelen dersom

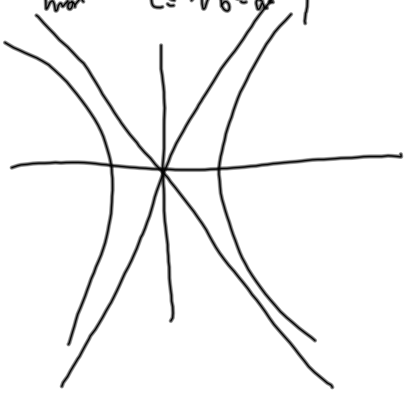
$|F_1P| - |F_2P| = \pm 2a$

$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$

Setning 3.6.5.

Likningen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ beskriver en hyperbel med brennpunkter $(-c,0)$ og $(c,0)$ hvor $c = \sqrt{a^2-b^2}$ når $a > b$

(når $a < b$, $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ ——— // ——— $(0,-c)$ og $(0,c)$ hvor $c = \sqrt{b^2-a^2}$)



Setning 3.6.6.: Hyperbelen $\left(\frac{x-m}{a}\right)^2 - \left(\frac{y-n}{b}\right)^2 = 1$ har asymptoter gitt ved

$y = \pm \frac{b}{a}(x-m) + n$

Bevis: Anta $m = n = 0$. Løs likningen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ m.h.p. y:

$y = \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Da blir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2-a^2} - x = \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2-a^2} - x)(\sqrt{x^2-a^2}+x)}{\sqrt{x^2-a^2}+x}$$

$$= \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-a^2-x^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x} = \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x} = 0 \quad \blacksquare$$

$(u-v)(u+v)$
$= u^2 - v^2$