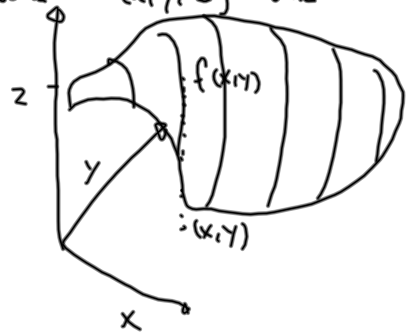
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, grafen til f er en flate i $\mathbb{R}^3$, som består av punktene (x, y, z) slik at $z = f(x,y)$

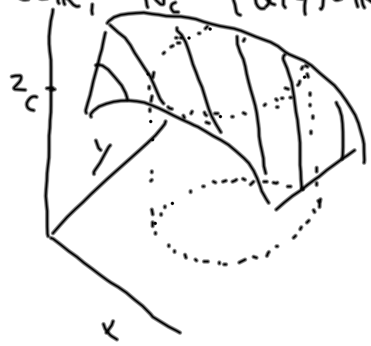


$f(x,y) = \sin\left(\frac{x}{y}\right)$ - vanskelig å danne seg et bilde av grafen

Dersom man ser et objekt ovenifra, nedenifra og fra to av sidene, kan man danne seg et bilde av objektet.

Nivåkurver (ovenifra/nedenifra)

La $c \in \mathbb{R}$, $N_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}$



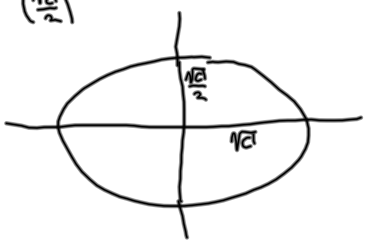
Eksempel: $f(x,y) = x^2 + 4y^2$, hvilke $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ er slik at

$x^2 + 4y^2 = c$

N_c er tom dersom $c < 0$ (ingen (x,y) tilfredstiller $f(x,y) = c$)

Anta $c > 0$.

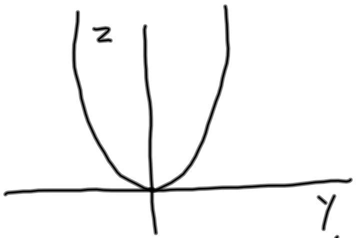
$\frac{x^2}{(\sqrt{c})^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\right)^2} = 1 \Rightarrow$ Nivåkurvene blir ellipser i planet.



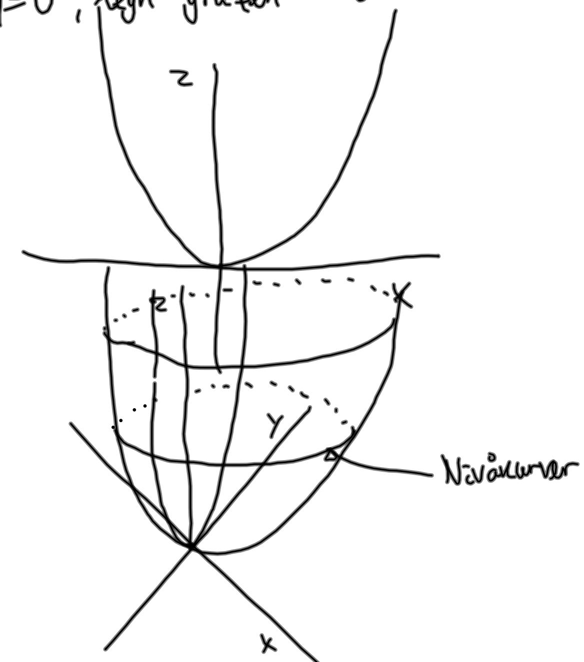
Se fra siden: La $x = 0$ (og senere $y = 0$)

Tegn grafen til $g(y) = f(0,y)$

$f(x,y) = x^2 + 4y^2$. $\quad g(y) = f(0,y) = 4y^2$

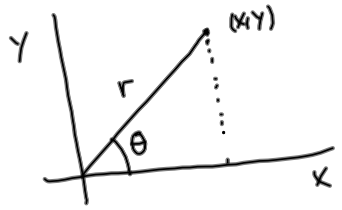


$y=0$, tegn grafen til $h(x) = f(x,0) = x^2$



Obs: Ikke alltid mulig å sette x eller y lik 0

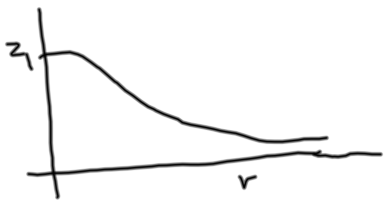
Polarkoordinater:



$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$r = \sqrt{x^2+y^2}$

Kan gi ekstra innsikt når man studerer 3-dimensjonale grafer

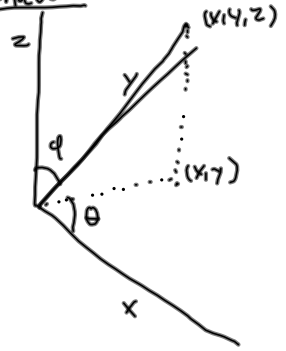
Eksempel: $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}$ når man bytter til polarkoordinater



Dette er grafen sett fra en vinkel θ fra (x,z)-planet

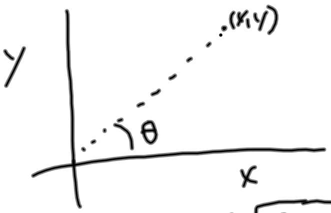
Vi kan gjøre tilsvarende i 3-dimensjoner:

Kulekoordinater:

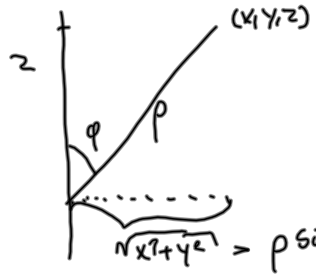


$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Se ned i (x,y)-planet



$x = \cos\theta\sqrt{x^2+y^2}$, $y = \sin\theta\sqrt{x^2+y^2}$



$\sqrt{x^2+y^2} = \rho\sin\varphi$

$z = \rho\cos\varphi$

Dette gir

$$z = \rho\cos\varphi$$
$$x = \cos\theta\sqrt{x^2+y^2} = \cos\theta\,\rho\sin\varphi$$
$$y = \sin\theta\sqrt{x^2+y^2} = \sin\theta\,\rho\sin\varphi$$

Tilbake til nivåflater:

Generelt, $f: A \to \mathbb{R}$, - funksjon av n-variable. For $c \in \mathbb{R}$ definerer vi nivåflaten

$$N_c := \{a \in A : f(a) = c\}$$

Setning 3.7.2. La $c = f(a)$, for $a \in A$, dersom $r: [a,b] \to N_c$ er en deriverbar kurve slik at $r(t_0) = a$. Da er $\nabla f(a) \cdot r'(t_0) = 0$

Bevis: Har at $r(t) \in N_c$ for alle t, dvs $f(r(t)) = c$

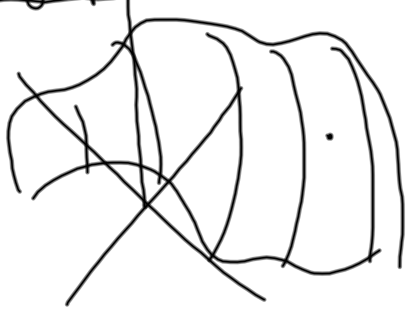
Da er $0 = \frac{d}{dt} f(r(t)) = \nabla f(r(t)) \cdot r'(t)$

Spesielt, la $t = t_0$ og siden $r(t_0) = a$, får vi

$$\nabla f(a) \cdot r'(t_0) = 0 \quad \blacksquare$$

Moral: Gradienten står normalt på nivåflatene

Tangentplan



Gitt en kurve/flate ønsker vi å "legge på" et plan i et bestemt punkt som følger krumningen til flaten.

Et plan i $\mathbb{R}^3$ kan beskrives v.h.a. et punkt b i planet og en normalvektor, n. Da består planet av $x \in \mathbb{R}^3$ slik at

$0 = n \cdot (x - b)$ - dette holder også i høyere dimensjoner.

Hvordan finner vi et tangentplan til grafen til en funksjon i et punkt?

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Definer $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y,z) := z - f(x,y)$

Grafen til f er nøyaktig nivåflaten til g i 0.

Siden $g(x,y,z) = 0 \iff f(x,y) = z$

Fra forrige resultat lærte vi at $\nabla g(x_0,y_0,z_0)$ står normal på nivåflaten $N_{g(x_0,y_0,z_0)}$.

Spesielt, for x_0,y_0,z_0 slik at $g(x_0,y_0,z_0) = 0$, så står $\nabla g(x_0,y_0,z_0)$ normalt på grafen til f.

$$\nabla g(x_0,y_0,z_0) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial g}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \right).$$

men $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, $\frac{\partial g}{\partial z} = 1$

altså er

$\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), 1\right)$ en normalvektor til grafen i $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

Da blir planet definert av mengden av alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ slik at

$$0 = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), 1\right) \cdot \left((x,y,z) - (x_0,y_0,f(x_0,y_0))\right)$$

$$0 = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y - y_0) + 1 \cdot (z - f(x_0,y_0))$$

Dette gir at planet er beskrevet ved

Høyere dimensjoner:

Gitt en funksjon $f: A \to \mathbb{R}$ av n variable så er tangentplanet i punktet $a \in A$ definert ved alle $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ slik at

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, -\frac{\partial f}{\partial x_n}(a), 1\right) \cdot (x - (a, f(a))) = 0.$$

Eksempel: $f(x,y) = x^3y^2$. Ønsker å finne tangentplan i $(2,-1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y.$$

Tangentplanet er bestemt ved alle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ slik at

$$0 = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)\left((x,y,z) - (x_0, y_0, f(x_0,y_0))\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,-1) = 12, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2,-1) = -16, \quad f(2,-1) = 8$$

$$z = 8 + 12(x-2) - 16(y+1)$$