Oppgaver: 5.5: 1, 3, 4, 5
5.6: 1, 2, 3, 5, 6, 9
5.7: 1, 2, 5

5.5.3: $f : [0,1] \to [0,1]$ kont. f har et fikspunkt (dvs en $x \in [0,1]$ slik at $f(x) = x$).

La $g(x) = f(x) - x$. g er kont. og nullpunkter til g er fikspunkt til f,

dvs $g(x) = 0 \iff f(x) - x = 0 \iff f(x) = x$

Så det holder å vise at g har et nullpunkt.

Idé: skjæringssetningen (siden g er kont.).

$g(0) = f(0) - 0 = f(0) \in [0,1]$, så spesielt er $g(0) \geq 0$

$g(1) = f(1) - 1$, siden $f(1) \in [0,1] \Rightarrow f(1) - 1 \leq 0$

Så g skifter fortegn $\Rightarrow$ det fins $x_0 \in [0,1]$ slik at $g(x_0) = 0$ dvs $f(x_0) = x_0$

5.5.5: $A \subset \mathbb{R}^n$ ikketom, lukket. $F : A \to A$ slik at $F^{\circ k}$ er en kontraksjon for en $k \in \mathbb{N}$ $\left(F^{\circ k}(x) = F(F(F(\dots(F(x))\dots)) \right)$.

Da har F et entydig fikspunkt.

(Siden $F^{\circ k}$ er en kontraksjon, så har $F^{\circ k}$ et entydig fikspunkt)

Bevis:

a) Anta x er et fikspunkt for F, dvs $F(x) = x$.

Da blir

$$F^{\circ k}(x) = \overbrace{F(F(\dots(\underbrace{F(x)}_{= x}))\dots)}^{k\text{-ganger}} = \overbrace{F(F(\dots \underbrace{F(x)}_{= x}))\dots)}^{k-1 \text{ ganger}} = \overbrace{F(F(\dots \underbrace{F(x)}_{= x})\dots)}^{k-2 \text{ ganger}}$$

$F(x) = x$. $F^{\circ 2}(x) = F(\underbrace{F(x)}_{= x}) = F(x) = \underline{x}$, $F^{\circ 3}(x) = F(\underbrace{F(F(x))}_{F^{\circ 2}(x) = x}) = F(x) = x$

x fikspunkt for $F \Rightarrow x$ fikspunkt for $F^{\circ k}$

$\Rightarrow$ fikspunkt for F (hvis det eksisterer), må være entydig.

Anta y er et annet fikspunkt til F. Da er y et fikspunkt til $F^{\circ k}$.

Da må $x = y$.

b) $F^{\circ k}$ kontraksjon $\Rightarrow$ det fins (entydig) $x \in A$ slik at $F^{\circ k}(x) = x$.

$F^{\circ k}(F(x)) = F^{\circ(k+1)}(x) = F(\underbrace{F^{\circ k}(x)}_{= x}) = F(x)$, så $F(x)$ er et fikspunkt til $F^{\circ k}$

Da må $F(x)$ være fikspunktet til $F^{\circ k}$, dvs $F(x) = x$

c) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (2y+1, \frac{x}{3}+1)$.

F er ikke en kontraksjon

$|F(0,1) - F(0,0)| = |(2+1, 1) - (1,1)| = |(2,0)| = 2 > 1 = |(0,1) - (0,0)|$

$\left(\overset{\vee}{|(0,1) - (0,0)|} \right)$ Se nå $F^{\circ 2}(x,y) = F(F(x,y)) = F(2y+1, \frac{x}{3}+1) = (2(\frac{x}{3}+1)+1, \frac{2y+1}{3}+1) = ($

5.6.1: $f(x) = x^3 - x$

a) f har tre nullpunkt, $f(-1) = (-1)^3 - (-1) = -1+1 = 0$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1^3 - 1 = 0$

b) Newtons metode: velg x_0 = estimat på nullpunkt til f,

$x_{n+1} = x_n - f'(x_n)^{-1} f(x_n)$. $\{x_n\}$ vil konvergere mot et nullpunkt

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

d) Tangentlinja til f i punktet x_0 er gitt ved

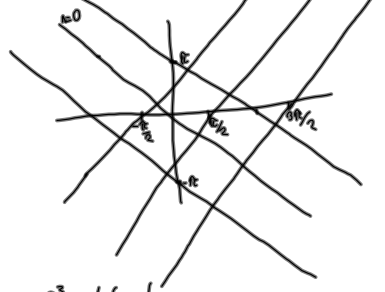
$$y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$$

5.6.3: $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin(x+y) \\ \frac{1}{2}\cos(x-y) \end{pmatrix}$

a) Nullpunkt til F dvs x, y slik at $\cancel{\tfrac{1}{2}}\sin(x+y) = 0$ og $\cancel{\tfrac{1}{2}}\cos(x-y) = 0$

$\sin(x+y) = 0 \iff x + y = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ $y = -x + n\pi$

$\cos(x-y) = 0 \iff x - y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $y = x - k\pi - \frac{\pi}{2}$



Nullpunkter til F ligger nøyaktig der disse linjene skjærer hverandre.

b) $x_0 \in \mathbb{R}^2$ startpunkt

$x_{n+1} = x_n - F'(x_n)^{-1} F(x_n)$

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos(x+y) & \frac{1}{2}\sin(x+y) \\ -\frac{1}{2}\sin(x-y) & \frac{1}{2}\sin(x-y) \end{pmatrix}$$

5.6.9: $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, fikspunkt til F = nullpunkt til G hvor

$$G(x) = F(x) - x$$

a) Newtons metode på G gir $x_{n+1} = (F'(x_n) - I)^{-1}(F'(x_n)x_n - F(x_n))$

Bevis:

$x_{n+1} = x_n - G'(x_n)^{-1} G(x_n)$. $G'(x) = F'(x) - I$

$$x_{n+1} = x_n - (F'(x_n) - I)^{-1} \underbrace{F(x_n)}^{-x_n} = (F'(x_n) - I)^{-1}(F'(x_n) - I)x_n - (F'(x_n) - I)^{-1}(F(x_n) - x_n)$$

$$= (F'(x_n) - I)^{-1}((F'(x_n) - I)x_n - \underbrace{F(x_n)}_{-x_n}) = (F'(x_n) - I)^{-1}(F'(x_n)x_n - x_n - (F(x_n) - x_n))$$

$$= (F'(x_n) - I)^{-1}(F'(x_n)x_n - F(x_n))$$

b) $f(x) = x^3 + 3x + 1$. Har nøyaktig ett fikspunkt mellom -1 og 0

$g(x) = f(x) - x = x^3 + 2x + 1$. Holder å vise at g har nøyaktig ett nullpunkt.

Se på $g(-1) = (-1)^3 - 2 + 1 = -2 < 0$, $g(0) = 1 > 0$.

Fra skjæringssetn. fins $x_0 \in [-1, 0]$ slik at $g(x_0) = 0$. (x_0 et fikspunkt for f)

Siden $g'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ er strengt positiv, er g strengt stigende

$\Rightarrow$ g har høyst ett nullpunkt

c) Fikspunktiterasjon, $x_0 = -\frac{1}{2}$. $x_{n+1} = f(x_n)$