4.5: 1 a) b), 2 a) b), 3 a) b), 4 a) b), 6, 7, 8, 9
4.6: 1, 2, 3, 4, 6

4.5.6: $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Finn B^{-1}

$$\boxed{\text{Dersom } B \text{ er invertibel, } [B \;\; I] \sim [I \;\; B^{-1}]}$$

$$[B \;\; I] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

så $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

b)
$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ y + z &= 3 \\ -2y + z &= 3 \end{aligned} \iff B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad B \text{ som i a)}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right) + 3\cdot\frac{2}{3} \\ 0\cdot 5 + 3\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right) \\ 0\cdot 5 + 3\cdot\frac{2}{3} + 3\cdot\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Sjekk $B\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$!

c)
$$\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ y + z &= 3 \\ -2y + (a+1)z &= b^2 - 10 \end{aligned}$$

For hvilke valg av a og b har systemet én, ingen og ∞-mange løsninger.

Se på den utvidede koeffisientmatrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & a+1 & b^2-10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a+3 & b^2-4 \end{pmatrix}$$

Anta $a+3=0$, dvs $a=-3$.

Dersom $b^2-4 \neq 0$, dvs $b \neq \pm 2$, har systemet ingen løsning

Dersom $b^2-4=0$, dvs $b=\pm 2$, har systemet en fri variabel, altså ∞-mange løsninger.

Anta at $a+3 \neq 0$, dvs $a \neq -3$. Da er hver søyle en pivotsøyle, altså har systemet nøyaktig én løsning (uavh. av b).

4.5.7: A inverterbar matrise, b radvektor

$xA = b$

Likningssystemet har en entydig løsning gitt ved $x = bA^{-1}$

Bevis: Viser først at $x = bA^{-1}$ er en løsning:

$xA = (bA^{-1})A = b(A^{-1}A) = b\,I_n = b$

Viser så at løsningen er entydig:

Anta at y er en annen løsning, dvs $yA = b$

Da blir

$x = bA^{-1} = (yA)A^{-1} = y(AA^{-1}) = y\,I_n = y$

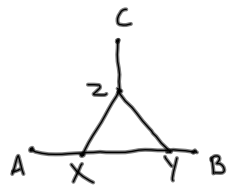
4.5.8: A inverterbar, B inverterbar.

$C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ er inverterbar og $C^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$

Bevis: Definér $D = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix}$. $CD = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA^{-1} + 00 & 0A + 0B^{-1} \\ 0A^{-1} + B0 & 00 + BB^{-1} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = I$, altså er $D = C^{-1}$

4.5.9:



a = spenning i A $\quad$ x = spenning i X

b = —//— B $\quad$ y = —//— Y

c = —//— C $\quad$ z = —//— Z

x = gjennomsnitt av spenningen i $A, Y, Z = \frac{a+y+z}{3}$ i)

y = —//— $B, X, Z = \frac{b+x+z}{3}$ ii)

z = —//— $C, X, Y = \frac{c+x+y}{3}$ iii)

Fra i) $3x = a+y+z$, $\quad 3x - y - z = a$

fra ii) $3y = b+x+z$, $\quad -x + 3y - z = b$

fra iii) $3z = c+x+y$, $\quad -x - y + 3z = c$.

Dette er ekvivalent med $A\vec{x} = \vec{b}$ hvor

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

b) finn A^{-1}

$[A \;\; I] \sim [I \;\; A^{-1}]$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) La $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Finn $\vec{x}$. $\quad A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/4 \\ 8/4 \\ 9/4 \end{pmatrix}$

altså blir $x = \frac{7}{4}$, $y = 2$, $z = \frac{9}{4}$

d) Velg a, b, c slik at $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

$A\vec{x} = \vec{b}$.

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{b} = A\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

4.6.4:

Skriv

$$\underbrace{\begin{pmatrix}7\\4\\-3\\1\end{pmatrix}}_{b} \text{ som en lineær kombinasjon av } \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}}_{a_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\3\\-4\end{pmatrix}}_{a_2}, \underbrace{\begin{pmatrix}5\\-7\\6\\3\end{pmatrix}}_{a_3}, \underbrace{\begin{pmatrix}2\\-1\\0\\3\end{pmatrix}}_{a_4}$$

Finn tall x_1, x_2, x_3 og x_4 slik at

$b = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4 . \Leftrightarrow \quad A\vec{x} = b$ hvor

$$A = (a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4), \ \vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

$$[A \ b] = \begin{pmatrix}1&2&5&2&7\\0&1&-7&-1&4\\-1&3&6&0&-3\\2&-4&3&3&1\end{pmatrix} \underset{\substack{\text{fra}\\ \text{MatLab}}}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&0&0&11.11\\0&1&0&0&1.89\\0&0&1&0&0.41\\0&0&0&1&-4.96\end{pmatrix}$$

Altså er

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11.11\\1.89\\0.41\\-4.96\end{pmatrix}, \quad b = 11.11\,a_1 + 1.89a_2 + 0.41a_3 - 4.96a_4$$

4.6.6.: Har $a_1, a_2, \dots, a_5$. Skal sjekke om disse utgjør en basis for $\mathbb{R}^4$

Rekkereduser

$$[a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5] \underset{\substack{\text{fra}\\ \text{MatLab}}}{\sim} \begin{pmatrix}1&0&2&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

har 4 pivot-søyler, altså utspenner $\{a_1, \dots, a_5\}$ hele $\mathbb{R}^4$

Ser at

$$a_3 = 2a_1 + 1a_2 = 2a_1 + a_2$$

så $\{a_1, a_2, a_4, a_5\}$ utspenner hele $\mathbb{R}^4$