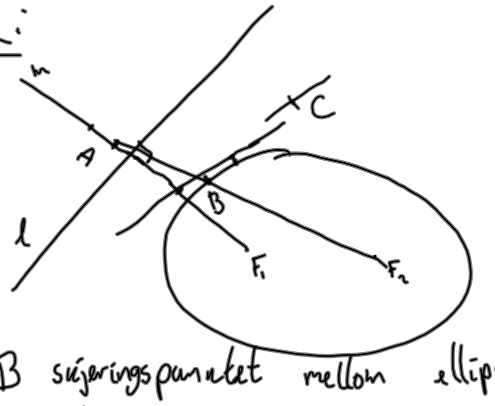
Oppgaver: 3.6: 1, 3, 4, 5, 7, 11, 12, 13, 14

3.7: 1 a), b), e), 2 a), c), d), 3 a), b) e), 4 a), b), c), 5, 6

3.6.12:

$|AF_2| = 2a$




a) B skjæringspunktet mellom ellipsen og $F_2A$

Vis at $|AB| = |BF_1|$

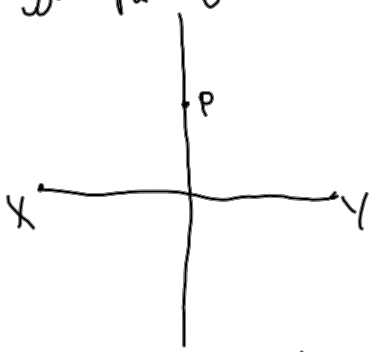
Har at $2a = |AF_2| = |AB| + |BF_2|$

og $2a = |F_1B| + |BF_2|$

Da må $|AB| + \cancel{|BF_2|} = |F_1B| + \cancel{|BF_2|}$

så $|AB| = |F_1B|$

b) B ligger på $t$ siden $|AB| = |F_1B|$




$|XP| = |YP|$

c) La C være et annet punkt på $t$.

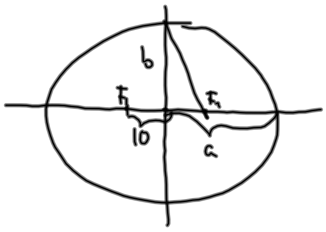
$|F_2C| + |CF_1| \underset{\phi}{=} |F_2C| + |CA| > |F_2A| = 2a$ → altså ligger C utenfor ellipsen

C ligger på midtnormalen

d) Siden $t$ er når ellipsen i ett og kun ett punkt er $t$ en tangentlinje

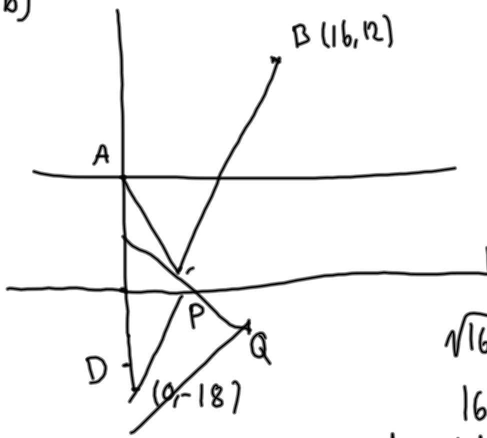
3.6.13:

a) Opplagt at dette danner en ellipse, med $2a = 34$.
Da blir store halvakse $a = 17$.




Lille halvakse
$b = \sqrt{17^2 - 10^2} = 3\sqrt{21}$

b)




Lar D ligge på y-aksen, 34 meter fra B
Finn koordinater til D.
Må være på formen $(0, y)$, og
$|BD| = 34$
$\sqrt{16^2 + (12-y)^2}$,
$16^2 + (12-y)^2 = 34^2$
andregradslikning i y, som har løsning
$y = -18$.

L være parallell med x-aksen, midtnormalen til AD
$y = -9$, Linja skjærer linjestykket DB i et punkt P
P ligger på ellipsen, dvs at $|PA| + |PB| = 34$.
Har at $34 = |DB| = |DP| + |PB| \underset{p}{=} |AP| + |PB|$
siden P er på midtnormalen

d) ingen andre punkter på midtnormalen L ligger på ellipsen.
La Q på midtnormalen
$|AQ| + |QB| = |QD| + |QB| > |DB| = 34$, så Q er inne på ellipsen.
P er det punktet på ellipsen med den minste y-verdien, altså der loddet vil stoppe opp

e) Likning for linjestykket DB, $y - y_0 = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0)$
hvor $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ er stigningen til linja, som går gjennom $(x_0, y_0)$
Vil at linja skal gå gjennom $(0, -18)$, og ha stigning
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{12-(-18)}{16} = \frac{30}{16}$

3.6.14:

$O = (0,0)$, $A = (0,6)$

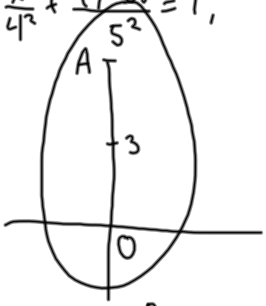
Alle punkter $X$ slik at $|OX| + |AX| = 10$

a) Dette er en ellipse. Finn likningen som beskriver ellipsen.

La $(x,y)$ være et tilfeldig punkt i planet. $(x,y)$ ligger på ellipsen dersom

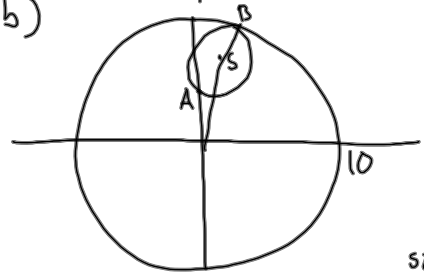
$$\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{|OX|} + \underbrace{\sqrt{x^2+(y-6)^2}}_{|AX|} = 10$$

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{(y-3)^2}{5^2} = 1, \quad \text{sentrum} : (0,3).$$





b)





S ligger på ellipsen, dvs

$|OS| + |SA| = 10$

Men

$10 = |OB| = |OS| + |SB|$

$= |OS| + |SA|$

siden A og B ligger på den minste sirkelen

c) Radiusen til den minste sirkelen skal være 3 cm

Finn koordinatene til S (og B)

$S = (x,y)$

Vil ha $|AS| = 3$,

$10 = |OB| = |OS| + |SB| = |OS| + 3$, $\quad |OS| = 7$

siden B skal ligge på den minste sirkelen

Altså

$$\underbrace{\sqrt{x^2+(y-6)^2}}_{|AS|} = 3 \quad \text{og} \quad \sqrt{x^2+y^2} = 7.$$

$x^2 + (y-6)^2 = 9, \quad x^2 + y^2 = 7^2 = 49$

$x^2 = 9 - (y-6)^2, \quad x^2 = 49 - y^2$

$9 - (y-6)^2 = 49 - y^2$

$9 - \cancel{y^2} + 12y - 36 = 49 - \cancel{y^2}$

$y = \frac{19}{3}, \quad x = \sqrt{49 - \frac{19^2}{9}} = \frac{4}{3}\sqrt{5}$

$B = (u,v)$. Bestem $(u,v)$ slik at

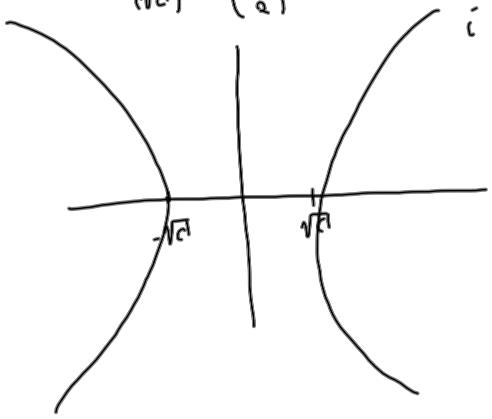
$|OB| = 10, \quad |BS| = 3$

3.7.2: d) $f(x,y) = x^2 - 4y^2$

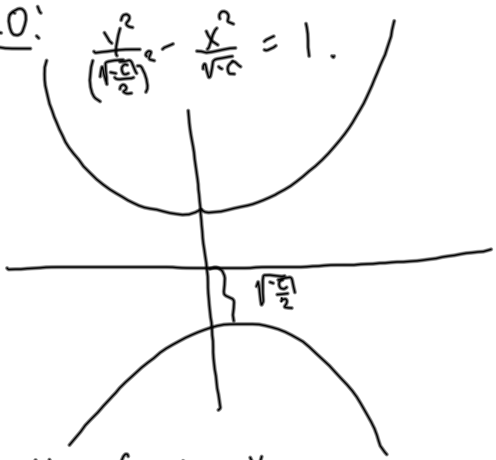
Finn nivåkurver

$$x^2 - 4y^2 = c$$

c > 0: $\frac{x^2}{(\sqrt{c})^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\right)^2} = 1.$ En hyperbel med fokuspunkt i $\sqrt{c + \frac{c}{4}}$




c < 0: $\frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{-c}}{2}\right)^2} - \frac{x^2}{\sqrt{-c}} = 1.$

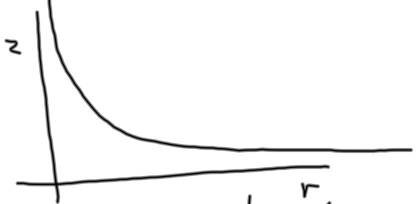



3.7.3.b) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

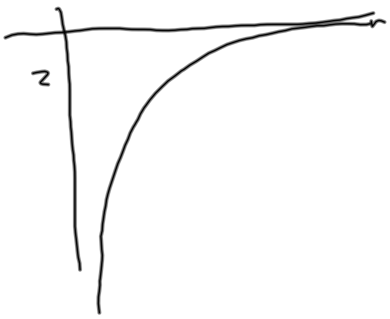
Skriv om til polarkoordinater, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{r\cos\theta}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}$$

Hvis $\theta$ er slik at $\cos\theta > 0$,




hvis $\theta$ er slik at $\cos\theta < 0$



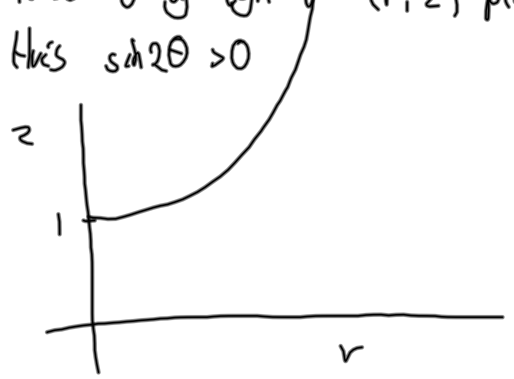
3.7.3.e):

$f(x,y) = e^{xy}, \quad x = r\cos\theta, \; y = r\sin\theta$

$= e^{r^2\cos\theta\sin\theta} = e^{r^2 \frac{1}{2}\sin 2\theta}$

Fiksér $\theta$ og tegn i $(r,z)$-planet

Hvis $\sin 2\theta > 0$




Hvis $\sin 2\theta < 0$