Oppgaver:

5.7: 3, 4, 6, 7, 9, 10, 14

5.8: 1, 2, 3

5.9: 1a), d) 3, 4, 6, 7, 8

Teorem 5.7.3. $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$, $f: U \to \mathbb{R}$, $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$

Da fins U_0 omegn om $\bar{x}$, $g: U_0 \to \mathbb{R}$ slik at $g(\bar{x}) = \bar{y}$

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \text{og} \quad \frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{x}) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}, \bar{y})}{\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})}$$

5.7.4: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xy^2 e^z + z$. Da fins g definert om $(-1, 2)$ slik at $g(-1, 2) = 0$ og $f(x, y, g(x, y)) = -4$

Bevis: $\tilde{f}(x, y, z) := f(x, y, z) + 4 = xy^2 e^z + z + 4$ (nullpunkt til $\tilde{f}$ gir $f = -4$)

$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z} = xy^2 e^z + 1$. $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}(-1, 2, 0) = -1 \cdot 2^2 \cdot e^0 + 1 = -3 \neq 0$

Fra thm 5.7.3 fins g slik at $\tilde{f}(x, y, g(x, y)) = 0$

$$f(x, y, g(x, y)) = -4. \quad \frac{\partial g}{\partial x}(-1, 2) = \frac{-\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(-1, 2, 0)}{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial z}(-1, 2, 0)} \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = y^2 e^z. \ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(-1, 2, 0) = 4e^0 = 4$$

$\frac{\partial g}{\partial x}(-1, 2) = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$. Tilsvarende finner man $\frac{\partial g}{\partial y}(-1, 2)$

5.7.7. Stigningstallet til $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (x_0, y_0), $y_0 \neq 0$

Definer $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1$. Hyperbelen er nullpunktene til f.

$f(x_0, y_0) = 0$. $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y}{b^2}$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, Da fins g slik at

$$f(x, g(x)) = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(x_0) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)} = \frac{-\frac{2x_0}{a^2}}{-\frac{2y_0}{b^2}} = \frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}$$

5.7.9: Har $\phi(x, y(x)) = C$. Vis at

$$y'(x) = \frac{-\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y(x))} \quad \text{dersom } \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y(x)) \neq 0$$

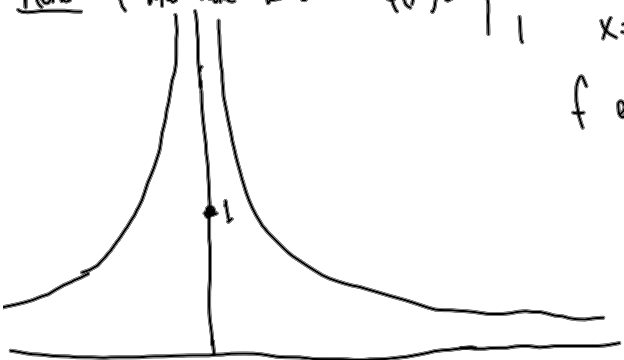
$$0 = \frac{d}{dx} C = \frac{d}{dx} \phi(x, y(x)) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y(x)) y'(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y(x)) y'(x) = -\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y(x)) \Rightarrow y'(x) = \frac{-\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y(x))}$$

5.8.2: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, positiv, kontinuerlig og $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$

Da har f et maksimumspunkt

Merk: f må være kont.: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$



f er positiv, $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$

men f har ikke et maksimumspunkt.

Bevis for 5.8.2.: Siden f er positiv, $f(0) > 0$. La $\varepsilon = f(0) > 0$

Siden $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$, velg $R > 0$ slik at $f(x) < \varepsilon$ når $|x| > R$.

Definer $A := \{x \in \mathbb{R}^m : |x| \leq R\}$ A er lukket og begrenset.

Restrikter f, dvs se på $f: A \to \mathbb{R}$. f er kontinuerlig + A lukket/begrenset

$\Rightarrow f$ har et maksimumspunkt på A.

Dvs det fins $x_0 \in A$ slik at $f(x_0) \geq f(x)$ for alle $x \in A$.

La nå x ikke være i A, $x \notin A$

$f(x) < \varepsilon = f(0) \leq f(x_0)$ så x_0 er et globalt maksimumspunkt.

siden $0 \in A$

5.8.3: A lukket + begrenset delmengde av $\mathbb{R}^m$.

$F : A \to A$ er kontinuerlig

a) $f : A \to \mathbb{R}$, $f(x) := |F(x) - x| = |x - F(x)|$

f er kontinuerlig.

Bevis: La $x \in A$, $\varepsilon > 0$. Må vise at det fins en $\delta > 0$ slik at

$|x-y| < \delta$ så er $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Siden F er kontinuerlig, fins $\eta > 0$ slik at $|x-y| < \eta$ så er $|F(x) - F(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$

La nå $\delta > 0$ være slik at $\delta < \eta$ og $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ (f.eks. $\delta = \frac{\min(\eta, \frac{\varepsilon}{2})}{2}$)

Da blir, hvis $|x-y| < \delta$. ($< \frac{\varepsilon}{2}, \eta$)

$$|f(x) - f(y)| = \big| |x - F(x)| - |y - F(y)| \big| \underset{\uparrow}{\leq} |x - F(x) - (y - F(y))| = |x - y + F(y) - F(x)|$$

$||a| - |b|| \leq |a-b|$

$$\underset{\uparrow}{\leq} |x-y| + |F(y) - F(x)| < \delta + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$|u+v| \leq |u| + |v|$

$\boxed{\text{Alternativt: } F \text{ kont. } F(x) - x \text{ er kont. og } |\cdot| \text{ er kont.} \Rightarrow |F(x) - x| \text{ er kont.}}$

Da har f et minimumspunkt (fra setning 5.8.2.)

b) Anta at for $x \neq y$ så er $|F(x) - F(y)| < |x-y|$. Da har F et entydig fikspunkt.

Bevis: Fra oppg. a), fins x_0 slik at $f(x_0) \leq f(x)$ for alle $x \in A$.

Anta at $F(x_0) \neq x_0$. $\underbrace{|F(F(x_0)) - F(x_0)|}_{= f(F(x_0))} < \underbrace{|F(x_0) - x_0|}_{= f(x_0)}$ så $f(F(x_0)) < f(x_0)$ absurd, siden x_0 er et minimumspunkt.

Altså gjorde vi feil antagelse, dvs $F(x_0) = x_0$

Entydighet: Anta at $y \neq x_0$ er slik at $F(y) = y$. Da blir

$|x_0 - y| = |F(x_0) - F(y)| < |x_0 - y|$. Dette gir ønsket motsigelse. ■

c) La $f : (0,1) \to (0,1)$, $f(x) = \frac{x^2}{2}$. $f'(x) = x < 1$.

$|f(x) - f(y)| \leq |f'(c)| |x-y| < |x-y|$. Men anta $f(x) = x$, dvs $\frac{x^2}{2} - x = 0$, $x(x-2) = 0$

$\Rightarrow x = 2$ og $x = 0$.

Korollar 5.9.7. $A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$. $D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$

i) $D < 0 \Rightarrow a$ er et sadelpunkt

ii) $D > 0$, $A > 0 \Rightarrow a$ minpunkt

iii) $D > 0$, $A < 0 \Rightarrow a$ maxspunkt

Spesialtilfelle av
i) $Hf(a)$ positive egenverdier $\Rightarrow$ a minpunkt
ii) — // — neg. — // — $\Rightarrow$ a maxspunkt
iii) $Hf(a)$ pos. + neg. $\Rightarrow$ a sadelpunkt

5.9.6: $f(x,y) = (x+y^2)e^x$. Finn stasjonære punkter (karakteriser disse)

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x + (x+y^2)e^x = (1+x+y^2)e^x$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2ye^x$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $(1+x+y^2)e^x = 0$, $2ye^x = 0$ → $e^x \neq 0$, så $y = 0$

da må

$(1+x+0^2)e^x = 0 \Rightarrow x = -1$

$(-1,0)$ er stasjonært punkt.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x + (1+x+y^2)e^x = (2+x+y^2)e^x$. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2ye^x$. $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2e^x$

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} (2+x+y^2)e^x & 2ye^x \\ 2ye^x & 2e^x \end{pmatrix}$. $Hf(-1,0) = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}$. $\begin{vmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{vmatrix} = 2e^{-2} > 0$

og $e^{-1} > 0$

$\Rightarrow (-1,0)$ er et minimumspunkt.

5.9.7: $f(x,y,z) = xyz - x^2 - y^2 - z^2$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = yz - 2x$

$\frac{\partial f}{\partial y} = xz - 2y$

$\frac{\partial f}{\partial z} = xy - 2z$

$(0,0,0)$ stasjonært punkt

$yz - 2x = 0$ i)
$xz - 2y = 0$ ii)
$xy - 2z = 0$ iii)

i) $\Rightarrow x = \frac{yz}{2}$

innsatt i ii) $\frac{yz}{2}z - 2y = 0$

$yz^2 - 4y = 0$

$z^2 = 4 \Rightarrow z = \pm 2$

$y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

$(2,2,2), (-2,-2,2), (-2,2,-2), (2,-2,-2)$

Finn $Hf(x,y,z)$. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = y$. $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$. $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -2$

$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2 & z & y \\ z & -2 & x \\ y & x & -2 \end{pmatrix}$. $Hf(0,0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ - alle egenverdier negative $\Rightarrow (0,0,0)$ er et maxspunkt.

$Hf(2,2,2) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ positive og negative egenverdier $\Rightarrow (2,2,2)$ sadelpunkt.

Samme for resten.