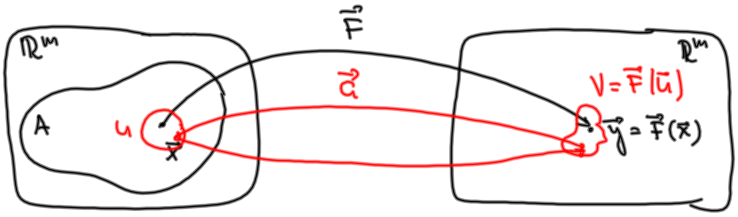
Invers funksjonsteorem

Minner om (kartesjon): $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^m$



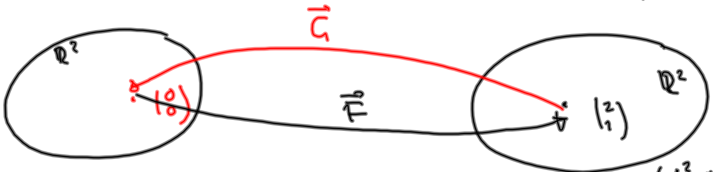
Dersom $\vec{F}'(\vec{x})$ er inverterbar, så finnes det en lokal invers G og

$$\vec{G}'(\vec{y}) = \vec{F}'(\vec{x})^{-1}$$

Eksempel: $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y + x - 2y + 2 \\ e^{x-y} \end{pmatrix}$$

Vis at $\vec{F}$ har en invers funksjon $\vec{G}$ definert i en omegn om $\binom{2}{1}$ slik at $\vec{G}(2,1) = \binom{0}{0}$, og finn $\vec{G}'(2,1)$.



Sjekker først at $\vec{F}(0,0) = \binom{2}{1}$: $\vec{F}(0,0) = \begin{pmatrix} 0^2 \cdot 0 + 0 - 2\cdot 0 + 2 \\ e^{0-0} \end{pmatrix} = ($

Vi må nå sjekke at $\vec{F}'(0,0)$ er inverterbar. Vi har

$$\vec{F}'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy+1 & x^2-2 \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{pmatrix}$$

Så

$$\vec{F}'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

som er inverterbar siden determinanten er forskjellig fra 0.

Ifølge inversfunksjonsteoremet har $\vec{F}$ en lokal invers G definert i en omegn om $\vec{F}(0,0) = \binom{2}{1}$.

Vi vet $\vec{G}'(2,1) = \vec{F}'(0,0)^{-1}$. Vi finner denne inversen på vanlig måte:

$$\begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ -1 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \end{array} \sim \begin{array}{c} 0 \quad 2 \quad -2 \quad 2 \\ \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right.$$

I_2 $\quad$ $F'($

Altså er $\vec{G}'(2,1) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. De partiellderiverte: $\vec{G}(u,v)$

$$\vec{G}'(2,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial u} & \frac{\partial G_1}{\partial v} \\ \frac{\partial G_2}{\partial u} & \frac{\partial G_2}{\partial v} \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial G_1}{\partial u}(2,1) = -1, \quad \frac{\partial G_1}{\partial v}(2,1) = 2$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial u}(2,1) = -1, \quad \frac{\partial G_2}{\partial v}(2,1) = 1$$

Implisitt funksjonsteorem

Sammenhenger er ofte gitt ved ligninger og ikke funksjoner:

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n,y)=0$$

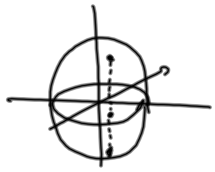
Ønsker meg isteden y som funksjon av $x_1,\dots,x_n$, dvs

$$y=g(x_1,\dots,x_n).$$

I så fall

$$f(x_1,x_2,\dots,x_n,g(x_1,\dots,x_n))=0$$

Eksempel: Kule: $x^2+y^2+z^2-1=0$

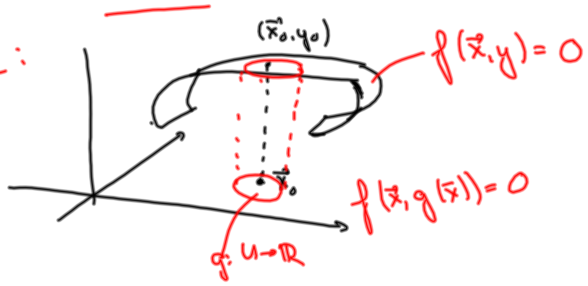


Løser for z: $z^2=1-x^2-y^2$

$$z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}$$

To løsninger: en for nedre og en for øvre halvkule.

Generell tilfelle:



Implisitt funksjonsteorem: Anta at $A\subset\mathbb{R}^{m+1}$ er et åpent område og at $f:A\to\mathbb{R}$ har kontinuerlig partiellderiverte. Anta at $f(\vec x_0,y_0)=0$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(\vec x_0,y_0)\neq 0$. Da finnes det en omegn U om $\vec x_0$ og en deriverbar funksjon $g:U\to\mathbb{R}$ slik at $f(\vec x,g(\vec x))=0$ for alle $\vec x\in U$.

g er deriverbar og

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\vec x)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec x)}{\frac{\partial f}{\partial y}(\vec x)}$$

Begrunnelse for formelen for $\frac{\partial g}{\partial x_i}$:

Vet at $f(x_1,x_2,\dots,x_m,g(x_1,\dots,x_i,\dots,x_m))=0$ for alle $(x_1,x_2,\dots,x_m)\in U$

Deriverer m.h.p. x_i:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_i}=0$$

som gir

$$\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial x_i}=-\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

dvs

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\;}$$

Eksempel: $e^{xyz} - z = 0$

Ønsker å "løse" for z m.h.p. x, y, dvs vi vil ha en funksjon $z = g(x,y)$ slik at

$$e^{xy\,g(x,y)} - g(x,y) = 1$$

Ser at $(0,0,1)$ er en løsning

$$e^{0\cdot 0\cdot 1} - 1 = 0$$

Bruker implisitt funksjonsteoremet med

$$f(\underbrace{x,y}_{=\vec{x}},\underbrace{z}_{=y}) = e^{xyz} - z$$

HUSK

Ser på $\frac{\partial f}{\partial z} = e^{xyz}\cdot xy - 1$, $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,1) = e^{0\cdot 0\cdot 1}\cdot 0\cdot 0 - 1 = -1 \neq 0$

Dette betyr at ligningen $e^{xyz} - z = 0$ har en løsning $z = g(x,y)$ i et område rundt $(0,0)$ med $g(0,0) = 1$

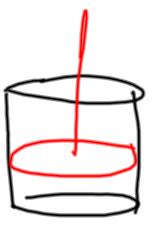
Vet også at $\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$, $\frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z} &= xy\,e^{xyz} - 1\\ \frac{\partial f}{\partial x} &= yz\,e^{xyz}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= xz\,e^{xyz}\end{aligned}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{yze^{xyz}}{xye^{xyz} - 1}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \dots$$

Eksempel: I mange anvendelser (fysikk, kjemi, økonomi) arbeider man med generelle sammenhenger

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m, y) = 0$$



gass

V = volum

T = temperatur

p = trykk

$$f(p,V,T) = 0$$

Ideell gass: $pV = kT$ ← konstant

$$f(p,V,T) = pV - kT$$

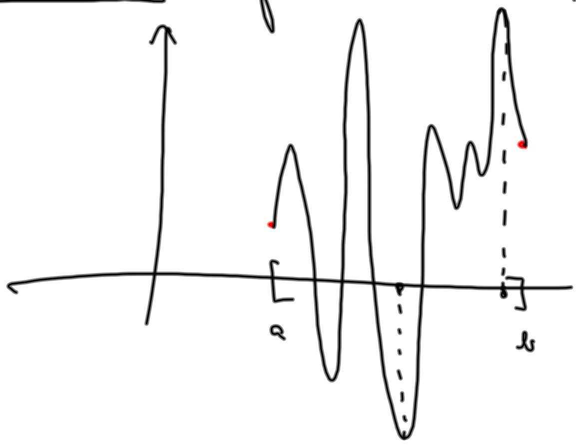
Vi tenker ofte på én av størrelsene som en funksjon av de to andre: $p(V,T)$: $f(p(V,T),V,T) = 0$

Deriverer m.h.p. V:

$$\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial V} + \frac{\partial f}{\partial V} = 0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial V}}{\frac{\partial f}{\partial p}}$$

Ekstremalverdisetningen

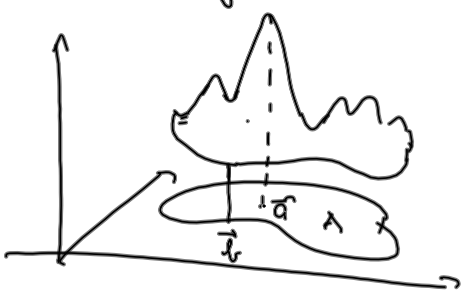
MAT 1100: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, kontinuerlig $\Rightarrow$ f har maks. og min. punkter.



Ekstremalverdisetning for funksjoner av flere variable:

Anta at $A \subset \mathbb{R}^m$ er en lukket, begrenset mengde og at $f : A \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig. Da har f maks. og minimumsverdier på A; dvs. det finnes punkter $a, b \in A$ slik at

$$f(b) \leq f(x) \leq f(a) \text{ for alle } x \in A.$$



Bevis (for maksimumspunkt):

$\alpha = \sup\{f(x) : x \in A\}$ (α kan tenkes å være ∞).

La $\{x_n\}$ være en følge i A slik at $f(x_n) \to \alpha$. Siden $\{x_n\}$ er begrenset, har den ved Bolzano-Weierstrass en konvergent delfølge $\{x_{n_k}\}$ med et grensepunkt $a \in A$ (husk at A er lukket). Da er

$$f(a) \overset{f \text{ er kont.}}{=} \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) \overset{\text{valg av } \{x_n\}}{=} \alpha$$

Siden ingen funksjonsverdier kan være større enn α, må a være et maksimumspunkt. QED.