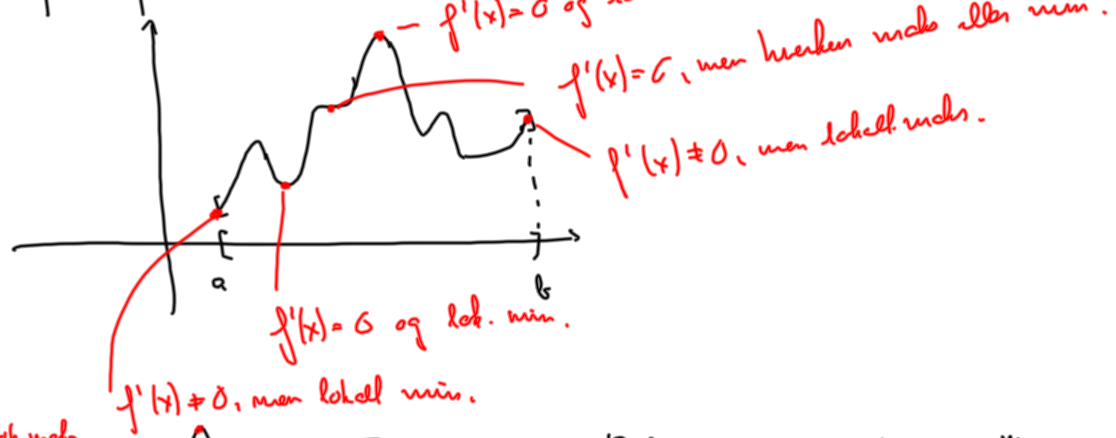
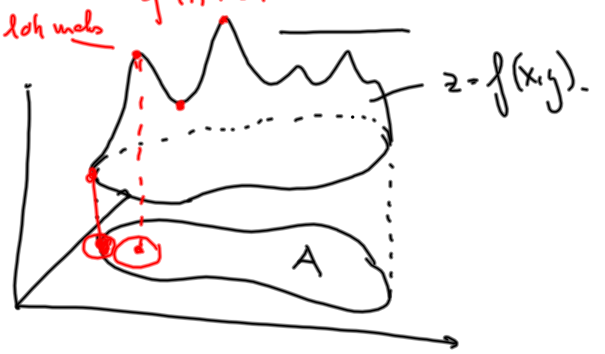
Maks og min for funksjoner av flere variable (seksjon 5.9)

For funksjoner av én variabel





<u>Definisjonen:</u> Anta $A \subset \mathbb{R}^m$ og la $f: A \to \mathbb{R}$ være en funksjon. Et punkt $\vec{a} \in A$ kalles et <u>lokalt maksimum</u> for f dersom det finnes en kule $B(\vec{a}, r)$ om $\vec{a}$ slik at $f(\vec{a}) \geq f(\vec{x})$ for alle $x \in B(\vec{a}, r) \cap A$.

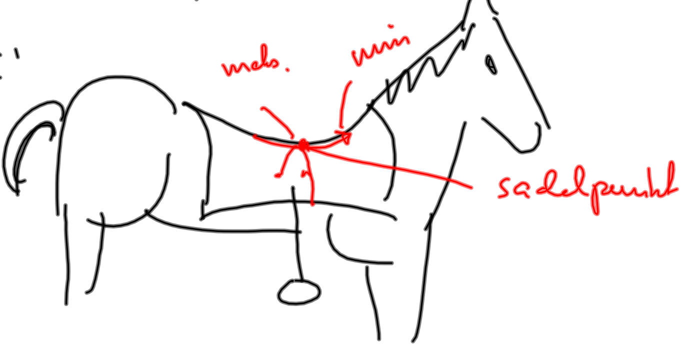
<u>Setning:</u> Anta at $f: A \to \mathbb{R}$ har et lokalt maks. eller min. i et indre punkt $\vec{a}$. Dersom de partiellderiverte til f eksisterer i $\vec{a}$, så er $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = 0$ for alle i. Med andre ord $\nabla f(\vec{a}) = 0$.

<u>Definisjon:</u> Et punkt hvor alle de partiellderiverte er null, kalles et <u>stasjonært</u> <u>punkt</u>.

<u>Eksempler:</u> a) Lokalt maks

b) lokalt min.

c) <u>Sadelpunkter</u>:



Eksempel: Finn de stasjonære punktene til

$$f(x,y) = x^2y - xy^2 + xy$$

Får

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - y^2 + y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2xy + x$$

Ligninger:

$$y(\overset{-2}{2x}-y+1) = 2xy - y^2 + y = 0 \begin{cases} y = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 2x+1 \end{cases}$$

$$x(x-2y+1) = x^2 - 2xy + x = 0$$

$-1 + 2 + 1$

Tilfellet I: $y = 0$ $\quad x(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = -1$

Stasjonære punkt $(0,0),\ (-1,0)$

Tilfellet II: $\underbrace{y = 2x+1}$: $\quad x(x - 4x - 2 + 1) \Rightarrow x\underbrace{(-3x-1)}_{0} = 0$

$x = 0,\ y = 1$

$x = -\frac{1}{3},\ y = 2\left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{1}{3}$

Stasjonære punkter: $(0,1),\ \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Stasjonære punkter: $\underline{(0,0),\ (-1,0),\ (0,1),\ \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}$

Ønske: En test som avgjør hva slags type stasjonært punkt vi har.

Funksjoner av én variabel: **Annenderiverttesten:**

Hvis $f'(a) = 0$ og

(i) $f''(a) > 0$ så er a et lokalt min

(ii) $f''(a) < 0$ så er a et lokalt maks

(iii) $f''(a) = 0$ så gir testen ingen konklusjon.

$f''(a) > 0$, f konveks

$f''(a) < 0$, f konkav

Skal utvide testen til flere variable!

Mange annenderiverte $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$

Hesse-matrisen:

$$Hf(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m}(\vec{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\vec{a}) & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

$Hf(\vec{a})$ er en symmetrisk matrise, og har en ortonormal basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m$ av egenvektorer ($\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i \neq j \\ 1 & \text{hvis } i = j. \end{cases}$

$$Hf(\vec{a})\vec{y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} y_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} y_2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} y_m \\ \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} y_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} y_2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} y_m \end{pmatrix}$$

Prikker med $\vec{y}$:

$$\left(Hf(\vec{a})\vec{y}\right) \cdot \vec{y} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} y_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} y_2 + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} y_m \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} y_i y_j$$

Annenderivertesten

$f(\vec{r}(t))$ $\vec{a}+\vec{y}$

$\vec{a}$ (stasjonært punkt)

$\vec{r}(t)=\vec{a}+t\vec{y} \quad t\in[0,1]$
parametrisering av linjestykket fra $\vec{a}$ til $\vec{a}+\vec{y}$

$\vec{r}\,'(t)=\vec{y}$

La $g(t)=f(\vec{r}(t))$

Deriverer: $g'(t)=\nabla f(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)=\nabla f(\vec{r}(t))\cdot\vec{y}$

$$= \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{r}(t))}\, y_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{r}(t))\,y_2+\dots+\frac{\partial f}{\partial x_m}(\vec{r}(t))\,y_m$$

$$g''(t)=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{r}(t))\,y_1^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}(\vec{r}(t))\,y_2y_1+\dots\dots$$

$$=(Hf(\vec{r}(t))\vec{y})\cdot\vec{y}$$

Husk fra MAT-INF 1100: Taylorpolynom: $g(x)=g(0)+g'(0)x+\frac{1}{2}g''(c)x^2$

$x=1$: $g(1)=g(0)+g'(0)+\frac{1}{2}g''(c)$

For vår g:

$$\underset{f(\vec{a}+\vec{y})}{g(1)}=\underset{f(\vec{a})}{g(0)}+\underbrace{\nabla f(\vec{r}(0))}_{0}+\frac{1}{2}(Hf(\vec{r}(c))\vec{y})\cdot\vec{y}$$

Altså:

$$f(\vec{a}+\vec{y})=f(\vec{a})+\frac{1}{2}\underbrace{(Hf(\vec{r}(c))\vec{y})\cdot\vec{y}}$$

$$=f(\vec{a})+\underbrace{\frac{1}{2}(Hf(\vec{a})\vec{y})\cdot\vec{y}}+\underbrace{\text{"liten feil"}}_{\text{glemmer.}}$$

Filosofi:

(i) Hvis $(Hf(\vec{a})\vec{y})\cdot\vec{y}>0$ for alle $\vec{y}$, så er $\vec{a}$ et lokalt min.

(ii) —"— $(Hf(\vec{a})\vec{y})\cdot\vec{y}<0$ —"— , ——"—— maks.

(iii) —"— $(Hf(\vec{a})\vec{y})\cdot\vec{y}$ er positiv for noen y og negativ for andre, så sadelpunkt.

La $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_m$ være en ortonormal basis av egenvektorer for $Hf(\vec{a})$ med egenverdier $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$. Vi har $\vec{y}=c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+\dots+c_m\vec{v}_m$, og

$$Hf(\vec{a})\vec{y}=\underbrace{Hf(\vec{a})}_{A}(c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+\dots+c_m\vec{v}_m)=c_1\lambda_1\vec{v}_1+c_2\lambda_2\vec{v}_2+\dots+c_m\lambda_m\vec{v}_m$$

Vi der

$$(Hf(\vec{a})\vec{y})\cdot\vec{y}=(c_1\lambda_1\vec{v}_1+c_2\lambda_2\vec{v}_2+\dots+c_m\lambda_m\vec{v}_m)\cdot(c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+\dots+c_m\vec{v}_m)$$

$$=c_1^2\lambda_1+c_2^2\lambda_2+\dots+c_m^2\lambda_m$$

er dette uttrykket alltid pos eller neg. uavh. av valg av $c_1,c_2,\dots,c_m$.

Skal $(Hf(\vec{a})\vec{y})\cdot\vec{y}$ alltid være pos/neg, så må alle egenverdiene være pos/neg.

Annenderivertesten: Anta at f har kontinuerlige annenderiverte og at $\vec{a}$ er et stasjonært punkt. Da gjelder:

(i) Dersom alle egenverdiene til Hessematrisen er positive, så er $\vec{a}$ et lokalt minimumspunkt.

(ii) ———— " ———————— er negative, så ——"—— maksimumspunkt

(iii) Hvis det finnes egenverdier med motsatte fortegn, så er $\vec{a}$ et sadelpunkt.

(iv) Dersom noen egenverdier er null og de andre har samme fortegn, så gir testen ingen konklusjon.

Forenkling for funksjoner av to variable: A symmetrisk

$\det(A)=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_m$

2×2: $\det(A)=\lambda_1\lambda_2$ → neg. det. hvis fortegnene er forskjellig; → pos det hvis fortegnene like.

Annenderiverttesten i to variable: Anta at f har kontinuerlige annenderiverte, at $\vec{a}$ er et stasjonært punkt og la D være Hesse-determinanten:

$$D=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix} \qquad A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{a}),\ B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\vec{a}),\ C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{a})$$

(i) Hvis $D<0$, så er $\vec{a}$ et sadelpunkt

(ii) Hvis $D>0$, så er

(a) $\vec{a}$ er lok. maks dersom $A<0$

(b) —"— min dersom $A>0$.

(iii) Hvis $D=0$, så gir testen ingen konklusjon.