Basiser

En samling vektorer $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ i $\mathbb{R}^n$ kalles en <u>basis</u> dersom $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ er lineært uavhengige og utspenner hele $\mathbb{R}^n$, dvs at enhver vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ kan skrives som en lineærkombinasjon

$$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n$$

på nøyaktig én måte.

<u>Eksempel</u>: <u>Standardbasisen</u>: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$

Hvordan sjekker man om $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ er en basis?

Radreduser matrisen $[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n]$ og sjekk om det er pivotelementer i alle rader og søyler, dvs

redusert trappeform

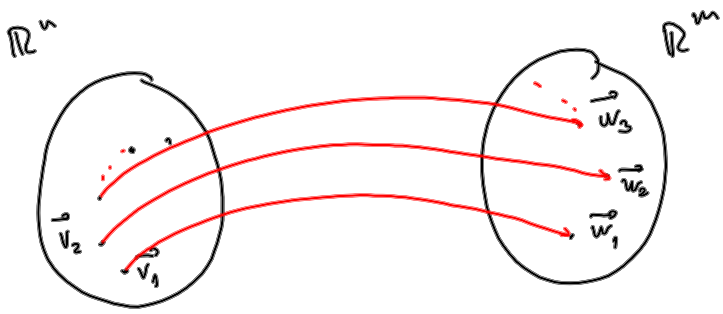
$$[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n] \sim \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \sim I_n$$

<u>Teorem</u>: Anta at $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ er en basis for $\mathbb{R}^n$ og at $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n$ er vektorer i $\mathbb{R}^m$. Da finnes det en entydig lineæravbildning $\vec{T}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ slik at

$$\vec{T}(\vec{v}_1) = \vec{w}_1, \quad \vec{T}(\vec{v}_2) = \vec{w}_2, \ldots, \vec{T}(\vec{v}_n) = \vec{w}_n,$$

og det er

$$\vec{T}(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n) = c_1\vec{w}_1 + c_2\vec{w}_2 + \cdots + c_n\vec{w}_n.$$



Elementære matriser (4.8)

Elementære radoperasjoner:

(i) Bytte om to rader

(ii) Gange en rad med et tall ulik 0.

(iii) Legge et multiplum av én rad til en annen rad.

En elementær matrise er en matrise som fremkommer ved å bruke én radoperasjon på I_n.

Eksempel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{IV}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ elementær matrise

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{(-\frac{1}{2})\mathrm{III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ —"—

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{I}+(-3)\mathrm{IV}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ —"—

Observasjon: Det å utføre en radoperasjon på en matrise A er det samme som å gange matrisen fra venstre med den tilsvarende elementærmatrisen.

Sjekker på et eksempel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \overset{\mathrm{I}+(-3)\mathrm{IV}}{\sim} \begin{pmatrix} a_{11}-3a_{41} & a_{12}-3a_{42} & a_{13}-3a_{43} & a_{14}-3a_{44} \\ \text{---} & '' & \text{---} & \\ \text{---} & '' & \text{---} & \\ \text{---} & '' & \text{---} & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-3a_{41}, \; a_{12}-3a_{42}, \ldots \\ a_{21}, \; a_{22} \; \text{---} \; . \\ \text{---} \; '' \; \text{---} \\ \text{---} \; '' \; \text{---} \end{pmatrix}$$

Bringe en matrise på redusert trappeform

$$A \overset{1}{\sim} A_1 \overset{2}{\sim} A_2 \overset{3}{\sim} \cdots \overset{n}{\sim} B$$

$$\underset{\text{opprinnelig matrise}}{\uparrow} \quad \underbrace{E_1 \quad E_2 \quad E_3 \quad \cdots \quad E_n}_{\text{tilhørende elementærmatriser.}} \quad \underset{\text{redusert trappeform}}{\uparrow}$$

Ser at.

$$A_1 = E_1 A$$

$$A_2 = E_2 A_1 = E_2 E_1 A$$

$$A_3 = E_3 A_2 = E_3 E_2 E_1 A$$

$$\vdots$$

$$B = E_n E_{n-1} \cdots E_1 A$$

Viktig i seg selv, men....

$$E_n^{-1} B = \underbrace{(E_n^{-1} E_n)}_{I_n} E_{n-1} \cdots E_1 A = E_{n-1} E_{n-2} \cdots E_1 A$$

$$E_{n-1}^{-1} E_n^{-1} B = \underbrace{E_{n-1}^{-1} E_{n-1}}_{I} E_{n-2} \cdots E_1 A = E_{n-2} \cdots E_1 A$$

$$\vdots$$

$$E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_{n-1}^{-1} E_n^{-1} B = A$$

dvs.

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_n^{-1} B$$

Siden den inverse til en elementærmatrise selv er en elementærmatrise, betyr dette at enhver $n \times n$-matrise er produktet av elementærmatriser $E_1^{-1}, E_2^{-1}, \ldots, E_n^{-1}$ og den reduserte trappeformen B.

Hvis A er inverterbar, så er $B = I$, og dermed er

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_n^{-1} I = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_n^{-1}$$

Setning: Enhver inverterbar matrise er produktet av endelig mange elementærmatriser.

Determinanter (4.9)

2x2-determinanter: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

3x3-determinanter:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Definisjon av nxn-determinanter:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & & \\ & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & & \\ & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+ a_{13} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ \vdots & & & \\ & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} - \cdots + (-1)^{n-1} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Eksempel:

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ 0 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$ vær så god fortsett!

Egenskaper ved determinanter

Lemma: Dersom en rad eller søyle i A er null, så er $\det(A) = 0$.

Bevis for søyler: 2×2-tilfellet: $\begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} = 0$

Anta at påstanden holder for $(n-1)\times(n-1)$-determinanter; vi skal vise at den da holder for $n\times n$-determinanter.

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{1n} \\ & & \vdots & \\ & & 0 & \end{vmatrix} \\ j\text{-te søyle} \end{array} = a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{0}} - \cdots \pm 0 \underbrace{\begin{vmatrix} \quad \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}}_{} = \underline{\underline{0}}$$

Lemma: Hvis A er enten øvre triangulær $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & \\ 0 & \ddots & a_{nn} \end{pmatrix}$ eller nedre triangulær $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{22} & 0 \\ & \ddots & a_{nn} \end{pmatrix}$, så er $\det(A)$ lik produktet av diagonalelementene, $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$.

Bevis for øvre triangulære matriser: 2×2: $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} = ad - b0 = \underline{ad}$

Anta påstanden gjelder for $(n-1)\times(n-1)$-determinanter, og la oss vise at den da må gjelde for $n\times n$-determinanter:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \overbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}}^{a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}} - a_{12} \overbrace{\begin{vmatrix} 0 & a_{23} & \cdots \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{vmatrix}}^{0}$$

$$+ a_{13} \overbrace{\begin{vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}}^{0} - \overbrace{\cdots\cdots}^{0}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

Sammenheng mellom determinanter og radoperasjoner

Teorem:

(i) Dersom vi bytter om to rader i en matrise, så bytter determinanten fortegn:

$$\det\begin{bmatrix}\vec{a}_1\\ \vdots\\ \vec{a}_i\\ \vdots\\ \vec{a}_j\\ \vdots\\ \vec{a}_n\end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix}\vec{a}_1\\ \vdots\\ \vec{a}_j\\ \vdots\\ \vec{a}_i\\ \vdots\\ \vec{a}_n\end{bmatrix}$$

(ii) Dersom vi ganger en rad med et tall s, så blir determinanten s ganger så stor

$$\det\begin{bmatrix}\vec{a}_1\\ \vdots\\ s\vec{a}_i\\ \vdots\\ \vec{a}_n\end{bmatrix} = s\det\begin{bmatrix}\vec{a}_1\\ \vdots\\ \vec{a}_i\\ \vdots\\ \vec{a}_n\end{bmatrix}$$

(iii) Dersom vi adderer et multiplum av en rad til en annen rad, så endres ikke determinanten:

$$\det\begin{bmatrix}\vec{a}_1\\ \vdots\\ \vec{a}_i+t\vec{a}_j\\ \vdots\\ \vec{a}_n\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}\vec{a}_1\\ \vdots\\ \vec{a}_i\\ \vdots\\ \vec{a}_n\end{bmatrix}$$

Enkel konsekvens: Dersom to rader i A er like, så er $\det(A)=0$.

$$\det(A)=\det\begin{pmatrix}\vec{a}_1\\ \vdots\\ \vec{a}_i\\ \vdots\\ \vec{a}_j\\ \vdots\\ \vec{a}_n\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}\vec{a}_1\\ \vdots\\ \vec{a}_j\\ \vdots\\ \vec{a}_i\\ \vdots\\ \vec{a}_n\end{pmatrix} = -\det(A),$$ dvs $\det(A)=-\det(A)$, dette: $\det(A)=0$.

like