Lineære ligningssystemer (kap. 4)

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & x + 2y + 3z = 2 \\ \mathrm{II} & 2x + 3y + z = 4 \\ \mathrm{III} & x - y + 2z = 5 \end{array} \Bigg\} \text{ tre ligninger og tre ukjente}$$

Grunnleggende spørsmål: Hvor mange løsninger og hvordan finner vi dem på en effektiv måte.

Grunnmetode: eliminere variable systematisk

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & x + 2y + 3z = 2 \\ \mathrm{II} + (-2)\mathrm{I} & -y - 5z = 0 \\ \mathrm{III} & x - y + 2z = 5 \end{array}$$

$-2x - 4y - 6z = -4 \quad (-2\mathrm{I})$

$-x - 2y - 3z = -2 \quad (-\mathrm{I})$

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & x + 2y + 3z = 2 \\ \mathrm{II} & -y - 5z = 0 \\ \mathrm{III} + (-\mathrm{I}) & -3y - z = 3 \end{array}$$

$(-3)\mathrm{II} \quad 3y + 15z = 0$

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I} & x + 2y + 3z = 2 \\ (-1)\mathrm{II} & y + 5z = 0 \\ \mathrm{III} + (-3)\mathrm{II} & 14z = 3 \end{array} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 2 \\ y + 5z = 0 \\ z = \frac{3}{14} \end{array}\right\} \text{trappeform}$$

$\underline{z = \frac{3}{14}}, \quad y = -5z = -5\frac{3}{14} = \underline{-\frac{15}{14}}$

$x = 2 - 2y - 3z = \frac{28}{14} + \frac{30}{14} - \frac{9}{14} = \frac{49}{14} = \underline{\underline{\frac{7}{2}}}$

Eksempel: Ligningssystemet avgjør har én løsning, men

$$\begin{array}{l} x - 2y = 4 \\ 3x - 6y = 2 \end{array} \quad \Bigg| \quad \mathrm{I}(-3) \quad -3x + 6y = -12$$

$3x - 6y = 12$

$3x - 6y = 2$

$$\boxed{\begin{array}{l} x - 2y = 4 \\ 0 = -10 \end{array}}$$ ingen løsninger.

$$\begin{array}{l} x - 2y = 4 \\ 3x - 6y = 12 \end{array} \quad (-3)\mathrm{I} \quad \underline{-3x + 6y = -12}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x - 2y = 4 \\ 0 = 0 \end{array}} \Rightarrow x = 2y + 4$$ velg y først, regn ut x, og vi har en løsning.

uendelig mange løsninger.

Et lineært ligningssystem med m ligninger og n ukjente er på formen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

der $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ og $b_1, \dots, b_m$ er kjente tall og $x_1, x_2, \dots, x_n$ er ukjente.

Matrisen til dette systemet er

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ og den utvidede matrisen er

$$[A, \vec{b}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Operasjoner vi kan bruke for å løse et ligningssystem:

I. Bytte om to ligninger

II. Gange en ligning med et tall $\neq 0$

III. Legge et multiplum av en annen ligning til én av ligningene i systemet.

Mål: Bruke disse operasjonene til å bringe systemet på trappeform.

Forenkling: Jobbe med den utvidede matrisen istedenfor ligningssystemet.

Eksempel:

$$\begin{aligned} 2x + 2y + z &= -3 \\ x - 2y - z &= 4 \\ 3x \qquad - z &= 2 \end{aligned}$$

Utvidet matrise:

$-2 \quad 4 \quad 2 \quad -8$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{I \leftrightarrow II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{II+(-2)I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & -11 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{III+(-3)I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & -11 \\ 0 & 6 & 2 & -10 \end{pmatrix} \overset{III+(-1)II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$-3 \quad 6 \quad 3 \quad -12$

$0 \quad -6 \quad -3 \quad 11$

$$\overset{\frac{1}{6}II,\ (-1)III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{11}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$ trappeform

Tilhørende ligningssystem:

$x - 2y - z = 4$ finner x

$y + \frac{1}{2}z = -\frac{11}{6}$ finner y

$z = -1$

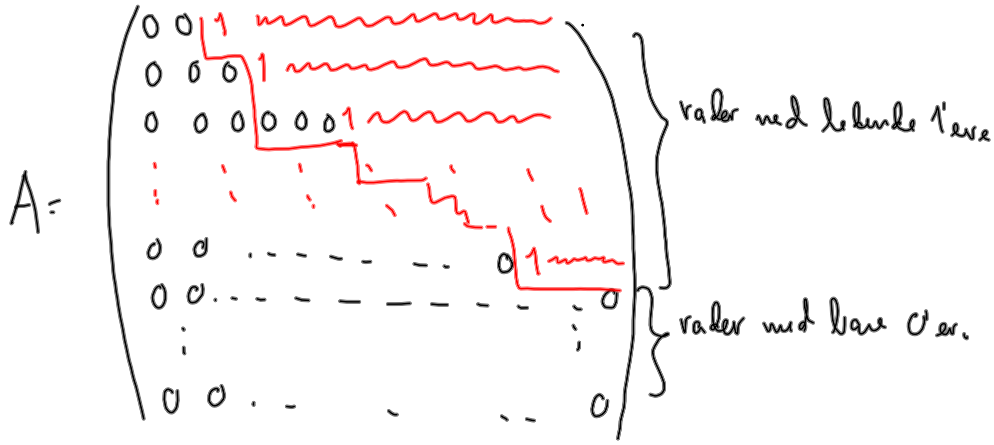
Trappeform

En matrise A er på trappeform dersom

I. I enhver rad som ikke bare består av nuller, er det første ikke-null elementet en 1'er.

II. Rader med bare nuller ligger nederst i matrisen.

III. Den ledende 1'eren i en linje ligger til høyre for den ledende 1'eren i linjen over.



Eksempel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ trappeform

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ trappeform

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ikke trappeform

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 & 7 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ikke trappeform

En <u>elementær</u> <u>matriseoperasjon</u> er

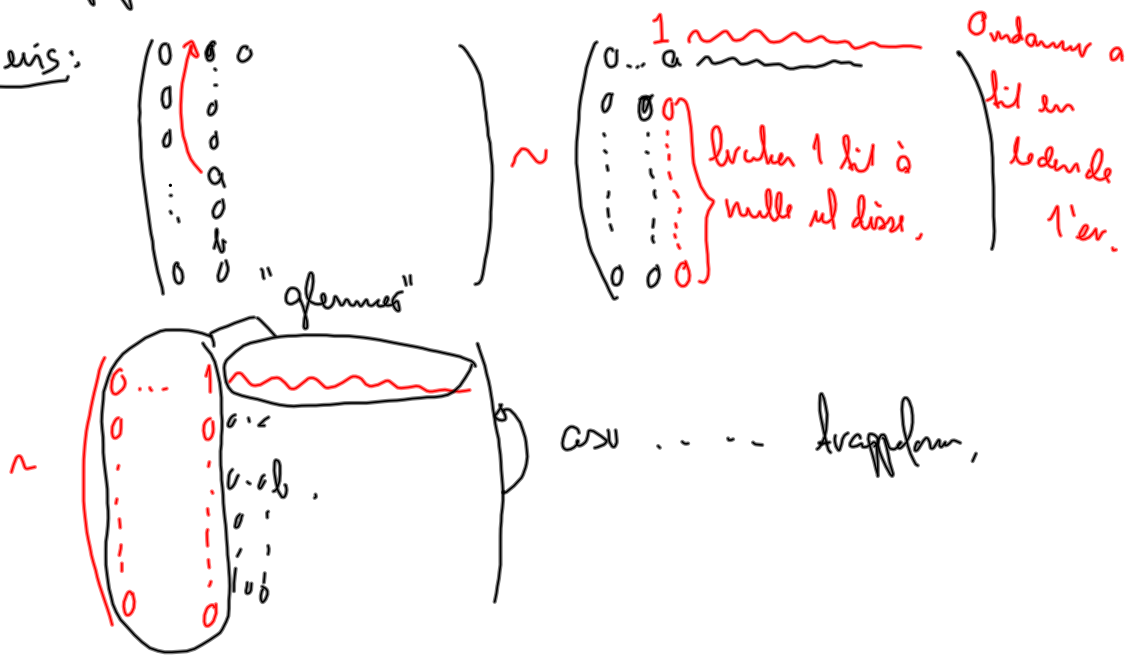
I. Bytte om to rader

II. Multiplisere alle tallene i en rad med et tall forskjellig fra 0

III. Til en rad legge et multiplum av en annen rad.

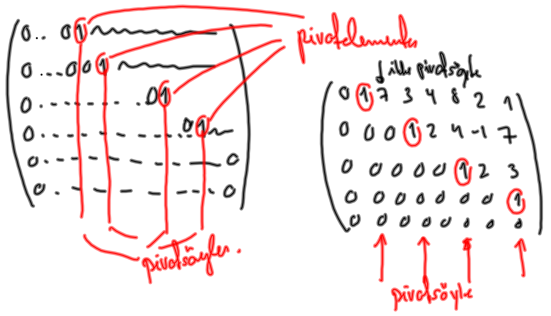
<u>Teorem</u>: Enhver matrise kan omdannes til en matrise på trappeform ved å bruke en sekvens av elementære operasjoner.

<u>Bevis</u>:



~~Teorem: Anta C er trappeformen til den utvidede matrisen til et ligningsystem. Da gjelder: (i)~~

Litt terminologi: Trappeform



Teorem: Anta at C er trappeform til den utvidede matrisen $(A,\vec{b})$ til et ligningsystem. Da gjelder:

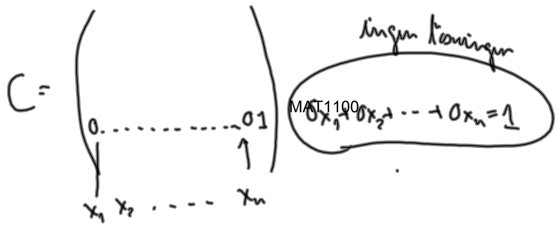
I. Dersom den siste søylen er en pivotsøyle, så har ligningsystemet ingen løsninger.

Hvis ikke, så gjelder:

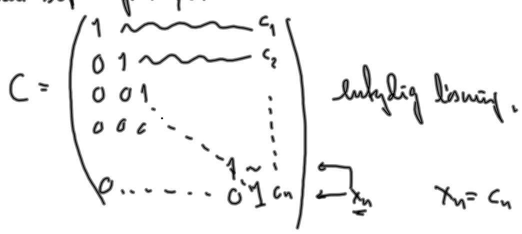
II. Hvis alle de andre søylene er pivotsøyler, så har systemet nøyaktig én løsning.

III. Hvis det finnes flere søyler som ikke er pivotsøyler, så har systemet uendelig mange løsninger.

Hvorfor? Siste søyle en pivotsøyle:



Alle andre søyler pivotsøyler



Andre ikke pivotsøyler