Gausseliminasjon

Husk:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

La $(A, \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ være den utvidede matrisen, og omform den til trappeform C.

Teorem:

I. Hvis den siste søylen i C er en pivotsøyle, så har systemet ingen løsninger

Hvis den siste søylen ikke er en pivotsøyle, så gjelder:

II. Hvis alle de andre søylene er pivotsøyler, så har ligningssettet en entydig løsning.

III Ellers er det uendelig mange løsninger.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \\ 0 & 0 & 1 & \sim & \sim & \sim & \sim \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \sim & \sim & \sim \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \sim & \sim \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ikke pivot

Eksempel:

$$x + 2y + z + u = 2$$
$$x - y + 2z + u = 3$$
$$2x + y + z - u = 6$$

Utvidet matrise

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-2\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$-2\mathrm{I} \quad -2 \quad -4 \quad -2 \quad -2 \quad -4$$

$$\overset{\mathrm{III}-\mathrm{II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \underset{-\frac{1}{2}\mathrm{III}}{\overset{-\frac{1}{3}\mathrm{II}}{\sim}} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & u \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

ikke pivot

Ligningssystem

$$x + 2y + z + u = 2$$
$$y - \tfrac{1}{3}z = -1/3$$
$$z + \tfrac{3}{2}u = -1/2$$

Velger u fritt, da er de andre variablene bestemt ved:

$$z = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}u$$

$$y = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}z = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}u\right) = \overbrace{-\frac{1}{3}}^{-\frac{2}{6}} - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}u = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}u$$

$$x = 2 - 2y - z - u = 2 - 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}u\right) - \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}u\right) - u$$
$$= 2 + 1 + \cancel{u} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}u - \cancel{u} = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}u$$

Løsningene er gitt ved:

$x = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}u$, $y = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}u$, $z = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}u$ for ethvert valg av u.

<u>En litt annen problemstilling:</u>

Gitt $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$. Når har ligningssystemet

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

løsninger for <u>alle</u> valg av høyresider $b_1, b_2, \dots, b_m$?

<u>Teorem:</u> Ligningssystemet har løsninger for alle valg av b'er hvis og bare hvis trappeformen til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

har pivotelementer i alle rader.

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & 1 & * \end{pmatrix}$$

<u>Bevisskisse:</u> Anta at trappeformen D til A har pivotelementer i alle rader og se på ligningssystemet

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Skriv den utvidede matrisen $(A, \vec{b})$ på trappeform

$$(A, \vec{b}) \sim \dots\dots\dots \sim \underbrace{(D, \tilde{\vec{b}})}_{\begin{pmatrix} 1 & & & & \tilde{b}_1 \\ & 1 & & & \tilde{b}_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & \underbrace{\tilde{b}_m} \end{pmatrix}}$$

ikke pivotsøyle,
systemet har løsninger.

Anta omvendt at D <u>ikke</u> har pivotelementer i alle rader:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & - \\ & 1 & \cdots & - \\ & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Radreduserer vi nå en utvidet matrise $(A, \vec{b})$, får vi

$$(A, \vec{b}) \sim \dots\dots \sim \underbrace{(D, \tilde{\vec{b}})}_{\begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \tilde{b}_1 \\ & 1 & \cdots & \tilde{b}_2 \\ & & & \\ \underbrace{0 \ 0 \ 0 \ 0}_{D} & & & \tilde{b}_m \end{pmatrix}}$$

potensielt problem

Alltid mulig å velge $\vec{b}$ slik at $\tilde{b}_m = 1$, og dermed er den siste søylen en pivotsøyle, og ligningssystemet har ingen løsninger.

<u>Korollar:</u> Ligningssystemet

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

har en <u>entydig</u> løsning for alle valg av b'er hvis og bare hvis trappeformen til A har pivotelementer i alle rader og søyler. Det betyr at $m = n$ og at A er på formen

$$\underbrace{D = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ & 1 & * & * & * \\ & & 1 & * & * \\ & 0 & & 1 & * \\ & & & & \ddots \ 1 \end{pmatrix}}_{\text{trappeformen til}}$$

<u>Bevis:</u> Skal det være løsninger for alle b'er, må det være pivotelementer i alle rader, og skal løsningene være <u>entydige</u> må det være pivotelementer i alle søyler. Dette medfører at D ser ut som

Redusert trappeform

Trappeform
$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definisjon: En matrise er på redusert trappeform dersom den er på trappeform og hver pivotsøyle inneholder bare nuller bortsett fra pivotelementet.

Eksempel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ redusert trappeform

pivotsøyle

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ trappeform, men ikke på redusert trappeform.

Eksempel: Skriv

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$ på redusert trappeform.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{III}-2\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{(-1)\mathrm{III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$-2\mathrm{I}\;\; -2 \;\; -2 \;\; -4 \;\; -4$

trappeform

må få nullet disse

$$\underset{\mathrm{I}-2\mathrm{III}}{\overset{\mathrm{II}+\mathrm{III}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{I}-2\mathrm{II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ redusert trappeform.

MATLAB: rref(A) produserer den reduserte trappeformen til A.

rref = reduced row echelon form

Korollar: Ligningsystemet

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad & \;\;\vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

har en entydig løsning for alle $b_1, b_2, \dots, b_m$ hvis og bare hvis den reduserte trappeformen til A er

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Bevis. Vi vet fra før at $n = m$ og at trappeformen til A er av typen

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

Da er den reduserte trappeformen I_n.

I denne situasjonen så er

$$(A, \vec{b}) \sim \dots \sim (I_n, \tilde{\vec{b}}) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & & & 0 & \tilde{b}_1 \\ & 1 & & & \tilde{b}_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & \tilde{b}_n \end{array}\right)$$

løsning av ligningssystemet

Ligninger

$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{b}_1 \\ x_2 &= \tilde{b}_2 \\ &\vdots \\ x_n &= \tilde{b}_n \end{aligned}$$

Matriseligninger (4.4)

Gitt: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

Ukjent: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Vil finne $\vec{x}$ som løser:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

Skriver ut:

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Altså:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} (*)$$

Det å løse matriseligningen $\underline{A\vec{x} = \vec{b}}$ er det samme som å løse ligningssystemet $(*)$.

Teorem: For matriseligningen $A\vec{x} = \vec{b}$ gjelder:

(i) Hvis trappeformen til $(A|\vec{b})$ har et pivotelement i siste søyle, så har ligningen ingen løsning.

Dersom dette ikke er tilfellet, så gjelder:

(ii) Dersom alle andre søyler er pivotsøyler, har $A\vec{x} = \vec{b}$ en entydig løsning.

(iii) Hvis ikke, så er ligningen uendelig mange løsninger.