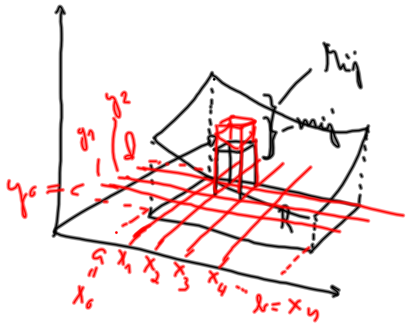
Dobbeltintegraler (Kap 6)



$$z = f(x,y)$$

Vil definere

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

Idé: Integralet skal (for positive f) gi oss volumet under funksjonsgrafen.

Notasjon: $R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) : x \in [a,b] \text{ og } y \in [c,d]\}$

En partisjon Π av R består av en partisjon

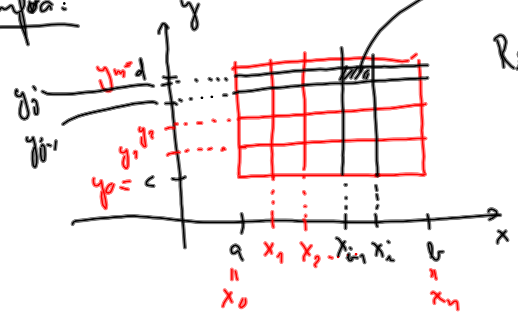
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

av intervallet $[a,b]$, pluss en partisjon

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = d$$

av intervallet $[c,d]$.

Sett ovenfra:



rute nummer i,j

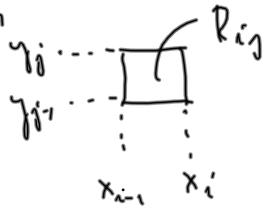
$$R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$

$$m_{ij} = \inf\{f(x,y) : (x,y) \in R_{ij}\}$$

$$M_{ij} = \sup\{f(x,y) : (x,y) \in R_{ij}\}$$

Den nedre trappesummen til partisjonen Π er

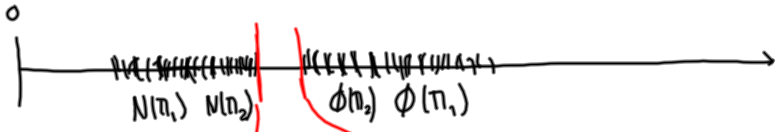
$$N(\Pi) = \sum_{i,j} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$



og den øvre trappesummen er

$$Ø(\Pi) = \sum_{i,j} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

En liten observasjon: Enhver nedre trappesum er mindre enn eller lik enhver øvre trappesum.



Nedre integral

$$\underline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy = \sup\{N(\Pi) : \Pi \text{ er en partisjon av } R\}$$

Øvre integral

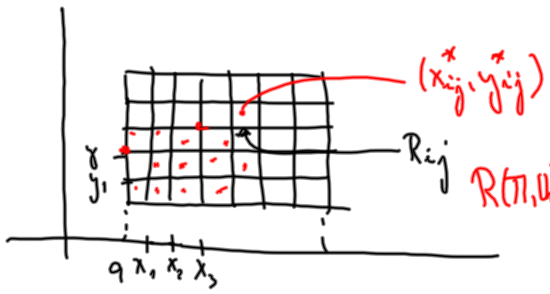
$$\overline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy = \inf\{\Phi(\Pi) : \Pi \text{ er en partisjon av } R\}$$

Definisjon: Dersom $\underline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy = \overline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy$, så sier vi at funksjonen f er integrerbar over R, og vi definerer dobbeltintegralet av f over R til å være

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \underline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy = \overline{\iint_R} f(x,y)\,dx\,dy$$

Teorem: Alle kontinuerlige funksjoner er integrerbare over R.

Alternativ definisjonsmetode (Riemann-sum): La Π være en partisjon av R. Et utplukk U består av ett punkt fra hver av rutene R_{ij}.



Den tilhørende Riemann-summen er

$$R(\Pi,U) = \sum_{ij} f(x^*_{ij}, y^*_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

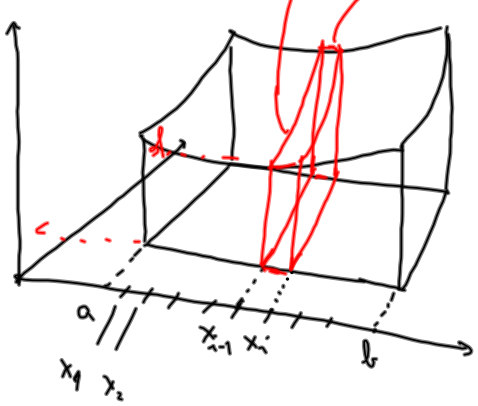
Dersom vi har en følge $\{\Pi_n, U_n\}$ av partisjoner og utplukk der maskevidden går mot null, så

$$R(\Pi_n, U_n) \to \iint_R f(x,y)\,dx\,dy$$

for alle kontinuerlige funksjoner.

Hvordan regner man ut dobbeltintegraler?

Brødskivemetoden:



V_i = volumet til den i-te skiven.

$$\approx A_i\,(x_i - x_{i-1})$$

$$= \underbrace{\int_c^d f(x_{i-1}, y)\,dy}_{F(x_{i-1})}\,(x_i - x_{i-1})$$

Hvis vi lar $F(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$, så blir uttrykket ovenfor til

$$V_i \approx F(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

Tilnærmet verdi for hele brødet: $V \approx \overbrace{\sum_i F(x_{i-1})\,(x_i - x_{i-1})}^{\text{Riemann-sum for } F} \to \int_a^b F(x)\,dx$

Altså

$$V = \int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \Big[\underbrace{\int_c^d f(x,y)\,dy}_{\text{integrerer mhp } y \text{ som om } x \text{ var en konstant}}\Big]\,dx$$

Ser ut som

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x,y)\,dy\Big]dx = \int_c^d \Big[\int_a^b f(x,y)\,dx\Big]dy$$

Teorem: Hvis f er kontinuerlig på R, så

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x,y)\,dy\Big]dx = \int_c^d \Big[\int_a^b f(x,y)\,dx\Big]dy$$

Eksempel: La $R=[0,2]\times[1,3]$ og finn

$$\iint_R x e^{xy}\,dx\,dy.$$

$u=xy,\ du = x\,dy$

$$\iint_R x e^{xy}\,dx\,dy = \int_0^2 \left[\int_1^3 x e^{xy}\,dy\right] dx = \int_0^2 \left[e^{xy} \right]_{y=1}^{y=3} dx$$

$$= \int_0^2 \left[e^{3x} - e^{x} \right] dx = \left[\frac{e^{3x}}{3} - e^{x} \right]_0^2 = \left[\frac{e^6}{3} - e^2 - \frac{1}{3} + 1 \right] = \ldots\ldots$$

Hva med å integrere den andre veien?

$$I = \iint_R x e^{xy}\,dx\,dy = \int_1^3 \left[\int_0^2 x e^{xy}\,dx\right] dy$$

Mellomregning: $\int x e^{xy}\,dx = \frac{x}{y} e^{xy} - \int \frac{e^{xy}}{y}\,dx$ $\qquad u = x \quad v' = e^{xy}$, $\quad u' = 1 \quad v = \frac{e^{xy}}{y}$

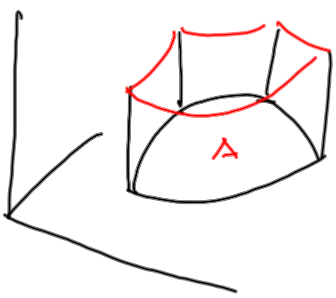
$$= \frac{x}{y} e^{xy} - \frac{1}{y^2} e^{xy}$$

Dermed:

$$I = \int_1^3 \left[\frac{x}{y} e^{xy} - \frac{1}{y^2} e^{xy} \right]_{x=0}^{x=2} dy = \int_1^3 \underbrace{\left[\frac{2}{y} e^{2y} - \frac{1}{y^2} e^{2y} + \frac{1}{y^2} \right]}_{\text{HUFF!}} dy$$

Integrasjonsrekkefølgen spiller ingen rolle for svaret, men kan spille en stor rolle for om man kommer frem til et svar!

Dobbeltintegraler i MATLAB: dblquad(@(x,y) x.*exp(x.*y),0,2,1,3)



$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$