Maks.- og min.-problemer

Husk:

Teorem: Anta at $f: A \to \mathbb{R}$ er en funksjon av to variable som har kontinuerlige annenderiverte. Dersom $\vec{a}$ er et stasjonært punkt i det indre av A, så gjelder følgende. Hvis

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\vec{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{a}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

er determinanten til Hesse-matrisen, så

(i) Hvis $D < 0$, så er $\vec{a}$ et sadelpunkt

(ii) Hvis $D > 0$, så

(a) Hvis $A > 0$, så er $\vec{a}$ et lokalt minimum

(b) –"– $A < 0$, —— " —— maksimum.

(iii) Hvis $D = 0$, så gir testen ingen informasjon.

Eksempel: $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 4 \\ \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow y = -2 \end{array}\right\} \text{stasjonært punkt } (1,-2).$$

Annenderivertesten:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(2x-2) = 2 = A$$

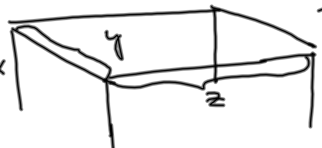
$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(2x-2) = 0 = B \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(2y+4) = 0 \end{array}\right\} \text{stemmer!}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(2y+4) = 2 = C$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 0 \cdot 0 = \underline{\underline{4}} \quad , \quad A = 2$$

Altså er $D = 4 > 0$, $A = 2 > 0$, så $(1,-2)$ er et lokalt min.

Eksempel: Vi skal lage et telt på $500\,m^3$. Hvordan -rammen skal vi minimere rammen?



Lengden til rammen:

$$L = 4x + 2y + 2z \qquad 500 = xyz \Rightarrow z = \frac{500}{xy}$$

Altså

$$L(x,y) = 4x + 2y + \frac{1000}{xy}$$

Hvilken verdier av x og y gir dette uttrykket minst?

Finner stasjonære punkter:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4 - \frac{1000}{x^2 y}, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 2 - \frac{1000}{x y^2}$$

$$4 - \frac{1000}{x^2 y} = 0 \Rightarrow 4x^2 y = 1000 \Rightarrow x^2 y = 250 \Rightarrow y = \frac{250}{x^2}$$

$$2 - \frac{1000}{x y^2} = 0 \Rightarrow 2xy^2 = 1000 \Rightarrow \underline{xy^2 = 500}$$

Setter inn for y i den nederste ligningen:

$$x \underbrace{\frac{250^2}{x^4}}_{y^2} = 500 \Rightarrow \frac{250}{x^3} = 2 \Rightarrow x^3 = 125 \Rightarrow \underline{x = 5}$$

Videre: $y = \frac{250}{x^2} = \frac{250}{25} = \underline{\underline{10}}$

$$z = \frac{500}{xy} = \frac{500}{50} = \underline{\underline{10}}$$

Bruker annenderiverten til å sjekke at dette er et min.-punkt

Husk $\frac{\partial L}{\partial x} = 4 - 1000x^{-2}y^{-1}$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 2 - 1000x^{-1}y^{-2}$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -1000(-2x^{-3})y^{-1} = 2000x^{-3}y^{-1} = \frac{2000}{x^3 y}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = -1000x^{-2}(-y^{-2}) = 1000x^{-2}y^{-2} = \frac{1000}{x^2 y^2}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -1000x^{-1}(-2y^{-3}) = \frac{2000}{xy^3}$$

$$A = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(5,10) = \frac{200\cancel{0}}{5^3 \cdot \cancel{10}} = \frac{200}{125} = \frac{8 \cdot 25}{5 \cdot 25} = \frac{8}{5}$$

$$B = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(5,10) = \frac{10\cancel{00}}{5^2 \cdot \cancel{10^2}} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

$$C = \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(5,10) = \frac{\cancel{2000}}{5 \cdot \cancel{10^3}} = \frac{2}{5}.$$

Hesse-determinanten:

$$D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{8}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{vmatrix} = \frac{16}{25} - \frac{4}{25} =$$

$D = \frac{12}{25} > 0$, $A = \frac{8}{5} > 0 \Rightarrow$ (5,10) er et lokalt min.

Optimering under bibetingelser (seksjon 5.10)

Generell: Finn maks eller min til funksjonen

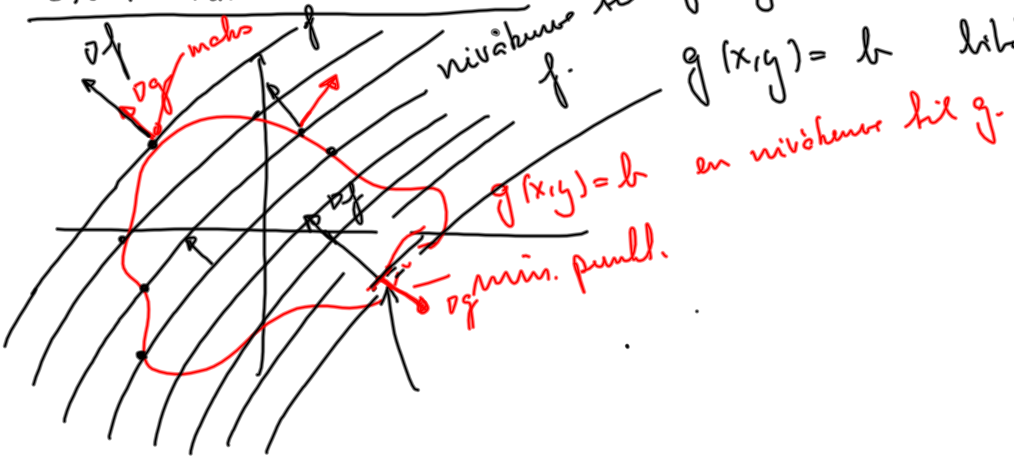
$$f(x_1, \dots, x_m)$$

under bibetingelsene

$$g_1(x_1, \dots, x_m) = b_1$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$g_k(x_1, \dots, x_m) = b_k$$

Starter med det enkleste: til $f(x,y)$ maks/min

$g(x,y) = b$ bibetingelsen



Teorem (Lagranges multiplikatormetode) Anta at $f(x_1,\dots,x_m)$ og $g(x_1,\dots,x_m)$ er to funksjoner med kontinuerlige partiellderiverte. Dersom funksjonen $f(x_1,\dots,x_m)$ har et lokalt maks eller min. under bibetingelsen $g(x_1,\dots,x_m)=b$ i punktet $\vec{a}$, så er enten $\nabla g(\vec{a})=\vec{0}$ eller det finnes et tall λ slik at

$$\nabla f(\vec{a}) = \underbrace{\lambda}_{\text{Lagrange multiplikator}} \nabla g(\vec{a}).$$

Hva betyr dette:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(\vec{a}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(\vec{a}) \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(\vec{a}) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_m}(\vec{a}) \end{aligned}\right\} \text{ m ligninger med } m+1 \text{ ukjente } a_1,\dots,a_m,\lambda$$

$$g(\vec{a}) = b \qquad \text{+ én ligning til.}$$

Eksempel: Finn maks/min til funksjonen $f(x,y)=2x+3y$ under bibetingelsen $\overbrace{3x^2+2y^2}^{g(x,y)=3x^2+2y^2}=3$ ellipse

Regner ut:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x \\ 4y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 6x \\ 4y \end{pmatrix}}_{\text{Lagrange}}$$

Dette gir:

$$2 = 6\lambda x$$
$$3 = 4\lambda y$$
$$3x^2+2y^2 = 3$$

Kan $\nabla g = 0$? Nei, for da må $x=0$ og $y=0$, og dette punktet tilfredsstiller ikke randbetingelsen.

$\boxed{\lambda = 0 \text{ ikke noe problem}}$

Løser for x og y i de to første ligningene: $x = \frac{1}{3\lambda}$, $y = \frac{3}{4\lambda}$

Setter inn i den nederste ligningen:

$$3\left(\frac{1}{3\lambda}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{4\lambda}\right)^2 = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3\lambda^2} + \frac{9}{8\lambda^2} = 3 \quad \Big| \; 24$$

$$72 = 8\cdot 9 = 2\cdot 4\cdot 9$$

$$8\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) + 27\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = 72$$

$$35\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) = 72 \Rightarrow \frac{1}{\lambda^2} = \frac{72}{35} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \pm\sqrt{\frac{72}{35}} = \pm\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{35}}$$

$$x = \frac{1}{3\lambda} = \frac{1}{3}\frac{1}{\lambda} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{35}}$$

$$y = \frac{3}{4}\frac{1}{\lambda} = \frac{3}{4}\left(\pm\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{35}}\right) = \pm\frac{9}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{35}}$$

Kandidater:

$\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{35}}, \frac{9}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{35}}\right)$ maks

$\left(-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{35}}, -\frac{9}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{35}}\right)$ min.

$f(x,y) = 2x+3y$

Siden vi leter etter maks og min over et lukket, begrenset område (nemlig $A=\{(x,y): 3x^2+2y^2=3\}$), så vet vi fra ekstremalverdisetningen at slike punkter finnes, og de eneste kandidatene er de vi har funnet. Følgelig er de maks og min.

Maks/min: **Hva med flere bibetingelser?**

$f(x_1, \ldots, x_m)$

under bibetingelsene

$$g_1(x_1, \ldots, x_m) = b_1$$
$$\vdots$$
$$g_k(x_1, \ldots, x_m) = b_k$$

Resultat: Dersom $\vec{a}$ er et lokalt maks/min for f under disse bibetingelsene, så er enten $\nabla g_1(\vec{a}), \ldots, \nabla g_k(\vec{a})$ lineært avhengig eller så finnes det konstanter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ slik at

$$\nabla f(\vec{a}) = \underbrace{\lambda_1 \nabla g_1(\vec{a}) + \lambda_2 \nabla g_2(\vec{a}) + \cdots + \lambda_k}_{\text{Lagrange multiplikatorer.}} \nabla g_k(\vec{a}).$$

I detalj:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) &= \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\vec{a}) + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\vec{a}) + \cdots + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(\vec{a}) \\
\frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}) &= \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\vec{a}) + \cdots + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_2}(\vec{a}) \\
&\vdots \\
\frac{\partial f}{\partial x_m}(\vec{a}) &= \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_m}(\vec{a}) + \cdots + \lambda_k \frac{\partial g_k}{\partial x_m}(\vec{a})
\end{aligned}\right\}$$

ukjente
m: $a_1, a_2, \ldots, a_m$
k: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$
$m+k$ ukjente

m ligninger

$$\left.\begin{aligned}
g_1(\vec{a}) &= b_1 \\
g_2(\vec{a}) &= b_2 \\
&\vdots \\
g_k(\vec{a}) &= b_k
\end{aligned}\right\}$$

$+ k$ ligninger

$m+k$ ligninger.