Lagranges multiplikatormetode

Husk:

Maks/minimere $f(x_1,x_2,\dots,x_m)$

under bibetingelsene
$$g_1(x_1,x_2,\dots,x_m)=b_1$$
$$g_2(x_1,x_2,\dots,x_m)=b_2$$
$$\vdots$$
$$g_k(x_1,x_2,\dots,x_m)=b_k$$

Må løse ligningene:

$$\nabla f(\vec{x})=\lambda_1\nabla g_1(\vec{x})+\dots+\lambda_k\nabla g_k(\vec{x})$$
$$g_1(\vec{x})=b_1$$
$$\vdots$$
$$g_k(\vec{x})=b_k$$

m-ligninger

m+k ukjente

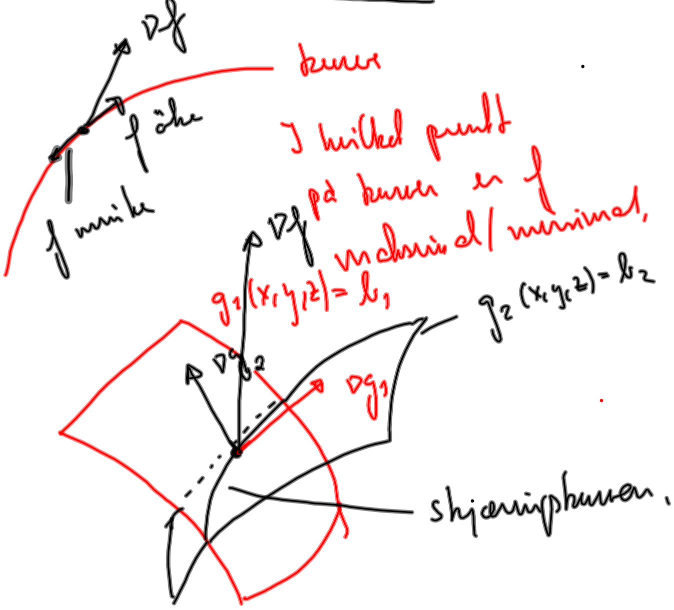
k ligninger.

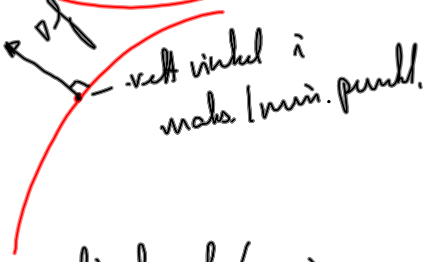
Hvorfor er det slik? Se på tilfellet

$f(x,y,z)$

$g_1(x,y,z)=b_1$

$g_2(x,y,z)=b_2$





For å få et maks/min må ∇f ligge i normalplanet utspent av ∇g_1 og ∇g_2; dvs ∇f er en lin. komb. av ∇g_1 og ∇g_2, dvs. at det finnes tall λ_1 og λ_2 slik at
$$\nabla f=\lambda_1\nabla g_1+\lambda_2\nabla g_2$$

Eksempel: Finn mulig maks./min punkter for

$$f(x,y,z) = x^2 - 2x + 2y^2 + z^2 + z$$

under bibetingelsene $x+y+z=1$, $2x-y+z=5$

$g_1(x,y,z) = x+y+z$

$g_2(x,y,z) = 2x-y+z$

Gradientene:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-2 \\ 4y \\ 2z+1 \end{pmatrix}, \quad \underbrace{\nabla g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \nabla g_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{lin. uavh.}}$$

Ligninger: $\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2$, dvs

$$\left.\begin{aligned} 2x-2 &= \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 4y &= \lambda_1 - \lambda_2 \\ 2z+1 &= \lambda_1 + \lambda_2 \\ x+y+z &= 1 \\ 2x-y+z &= 5 \end{aligned}\right\} \text{fem ligninger med fem ukjente } x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$$

Bruker ligning (2) og (3) til å eliminere λ_1 og λ_2:

$(2)+(3)$: $4y+2z+1 = 2\lambda_1 \Rightarrow \lambda_1 = 2y + z + \frac{1}{2}$

$(3)-(2)$: $2z+1-4y = 2\lambda_2$

setter inn i ligning (1):

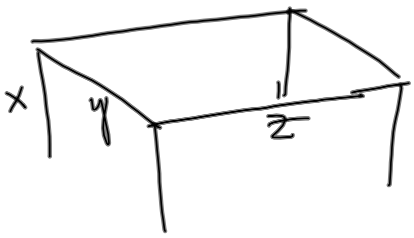
$$2x-2 = 2y + z + \frac{1}{2} + 2z + 1 - 4y$$

$$\boxed{2x + 2y - 3z = \frac{7}{2}}$$

Sitter igjen med tre lineære ligninger:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z &= 1 \\ 2x-y+z &= 5 \\ 2x+2y-3z &= \frac{7}{2} \end{aligned}\right\} \text{Gjør'e sjøl!}$$

Eksempel: Teltet:



Volum: $500\,m^3$

Minimer rørlengden:

$$L(x,y,z) = 4x + 2y + 2z$$

$$V(x,y,z) = xyz = 500 \quad \text{bibetingelsen}$$

Jakter på punkter slik at $\nabla L = \lambda \nabla V$.

$$\nabla L = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \nabla V = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

Ligninger:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \iff \left.\begin{aligned} 4 &= \lambda yz \\ 2 &= \lambda xz \\ 2 &= \lambda xy \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 4x &= \lambda xyz = 500\lambda \\ 2y &= \lambda xyz = 500\lambda \\ 2z &= \lambda xyz = 500\lambda \end{aligned}$$

$$\underbrace{xyz = 500}$$

$$x = 125\lambda, \quad y = 250\lambda, \quad z = 250\lambda$$

$$(125\lambda)(250\lambda)(250)\lambda = 500$$

$$\lambda^3 = \frac{\cancel{500}\,2}{125 \cdot \cancel{250} \cdot \cancel{250}\,125} \Rightarrow \lambda^3 = \frac{1}{5^3 \cdot 5^3} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{25}$$

$$x = 125 \cdot \frac{1}{25} = \underline{5}$$

$$y = 2x = \underline{10}$$

$$z = 2z = \underline{10}$$

5.11 selvstudium!

Kalkulus kap 12.

Rekker (kap 12, Kalkulus)

Intuitivt: En rekke er en uendelig sum av tall

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

Delsum: $s_N = \sum_{n=0}^{N} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_N$

Definisjonen: Hvis følgen $\{s_N\}$ av delsummer konvergerer mot et tall s, så sier vi at rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er konvergent og vi kaller s summen til rekken. Notasjon

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Hvis følgen $\{s_N\}$ ikke konvergerer, sier vi at rekken er divergent.

Hovedproblemstillinger:

(i) Finn summen $s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ når den finnes (ambisiøst)

(ii) Avgjør om en rekke er konvergent eller divergent (overkommelig)

Fra tidligere: Geometriske rekker

$$a_0 + a_0 r + a_0 r^2 + a_0 r^3 + \cdots \quad \text{kvotient.}$$

Konvergerer når $|r| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n = a_0 + a_0 r + a_0 r^2 + \cdots + a_0 r^n + \cdots = \frac{a_0}{1-r}$$

Divergenstesten: Dersom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer, så $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. M.a.o. dersom $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, så divergerer rekken.

OBS: En rekke kan godt divergere selv om $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Eks: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer selv om $\frac{1}{n} \to 0$ når $n \to \infty$.

Bevis for divergenstesten: Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer, og la $s_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$.

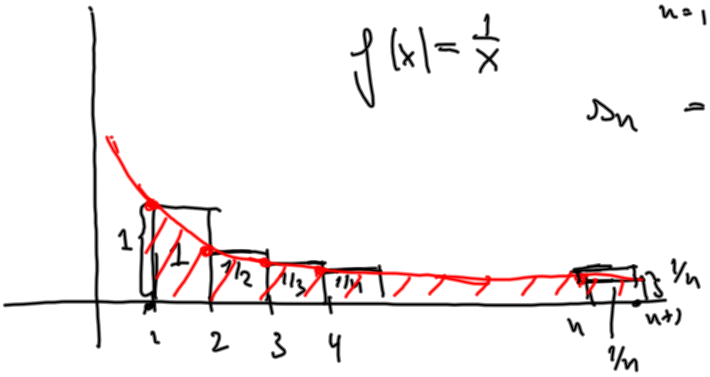
$$\left.\begin{aligned} s_N &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_N \\ s_{N-1} &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} \end{aligned}\right\} \quad s_N - s_{N-1} = a_N$$

$$\begin{array}{ccc} s_N & - \, s_{N-1} & = a_N \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ s & - \, s & 0 \end{array}$$

$$\lim_{N\to\infty} a_N = \lim_{N\to\infty} (s_N - s_{N-1}) = \underline{0}.$$

$$s_N \to s, \quad s_{N-1} \to s$$

Viser nå at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergerer. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$



$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \Big[\ln x\Big]_1^{n+1} = \ln(n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

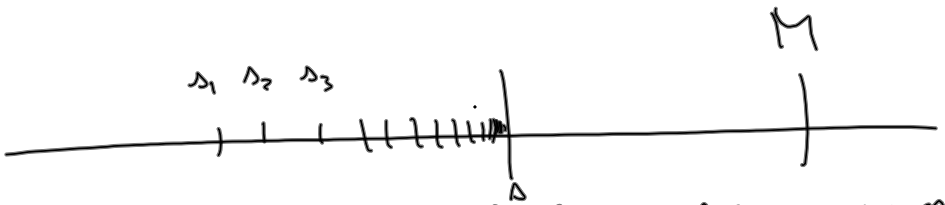
Altså $s_n \to \infty$

Positive rekker (12.2)

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ kalles en positiv rekke dersom $a_n \geq 0$ for alle n.

Delsummene s_n til en positiv rekke er en voksende følge.

Fra MAT 1100: En voksende, begrenset følge er konvergent.



En positiv rekke er dermed konvergent dersom delsummene er begrenset, dvs dersom det finnes et tall M slik at $s_n \leq M$ for alle n.

Integraltesten: Anta at $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ er en avtagende og positiv kontinuerlig funksjon. Da konvergerer rekken $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ hvis og bare hvis integralet $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergerer.

Bevisidé: Sammenlign arealet av bokser med høyde $f(n)$ og arealet under funksjonsgrafen.

Setning: Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergerer når $p>1$ og divergerer når $p\leq 1$.

Bevis: Vet at resultatet stemmer for $p=1$. For $p\neq 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ konvergerer} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \text{ konvergerer} \overset{\text{MAT1100}}{\Longleftrightarrow} p>1.$$

(Begrunnelse: $\int_1^{\infty} x^{-p}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-p}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{b^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\right]$$

$\to \infty$ hvis $1-p>0 \Rightarrow p<1$ divergens

0 hvis $1-p<0 \Rightarrow p>1$ konvergens.