Determinanter

Minner om

(i)
$$\det\begin{pmatrix}\vec a_1\\ \vdots\\ \vec a_j\\ \vdots\\ \vec a_i\\ \vdots\\ \vec a_n\end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix}\vec a_1\\ \vec a_2\\ \vdots\\ \vec a_i\\ \vdots\\ \vec a_j\\ \vdots\\ \vec a_n\end{pmatrix} \qquad \text{faktor } -1$$

(ii)
$$\det\begin{pmatrix}\vec a_1\\ \vdots\\ s\vec a_i\\ \vdots\\ \vec a_n\end{pmatrix} = s\det\begin{pmatrix}\vec a_1\\ \vdots\\ \vec a_i\\ \vdots\\ \vec a_n\end{pmatrix} \qquad \text{faktor } s$$

(iii)
$$\det\begin{pmatrix}\vec a_1\\ \vdots\\ \vec a_i + s\vec a_j\\ \vdots\\ \vec a_n\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix}\vec a_1\\ \vdots\\ \vec a_i\\ \vdots\\ \vec a_n\end{pmatrix} \qquad \text{faktor } 1$$

Eksempel:
$$\underbrace{\begin{pmatrix}2 & -2 & 4\\ -3 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}}_{A} \overset{s_1=\frac{1}{2}}{\sim} \begin{array}{c}\begin{array}{ccc}3 & -3 & 6\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -3 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\end{array} \overset{s_2=1}{\sim} \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 7\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\\ \begin{array}{ccc}-1 & 1 & -2\end{array}\end{array}$$

$$\overset{s_3=1}{\sim} \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 7\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix} \overset{s_4=-1}{\sim} \underbrace{\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 7\end{pmatrix}}_{B}$$

$$\det B = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot(-1)\det(A) = -\frac{1}{2}\det(A)$$

$$\Rightarrow \det(A) = -2\underbrace{\det B}_{1\cdot 3\cdot 7} = \underline{\underline{-42}}$$

Generell: $A \overset{s_1}{\sim} A_1 \overset{s_2}{\sim} A_2 \sim \cdots \overset{s_n}{\sim} \underbrace{B}_{\text{øvre diagonal}}$

$$\det B = s_n \cdot \ldots \cdot s_2\, s_1 \det(A)$$

eller
$$\det(A) = s_1^{-1} s_2^{-1} \ldots s_n^{-1} \det(B)$$

Observasjon:

$$\det(A) = s_1^{-1} \cdots s_n^{-1} \overbrace{\det(B)}^{\text{redusert trappeform}} \qquad \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow B = I_n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Teorem: For en $n \times n$-matrise A er følgende ekvivalent:

(i) Den reduserte trappeformen til A er I_n

(ii) A er inverterbar

(iii) $\det(A) \neq 0$

(iv) $A\vec{x} = \vec{b}$ har en entydig løsning for alle $\vec{b}$.

(v) $A\vec{x} = \vec{0}$ har kun løsningen $\vec{x} = \vec{0}$.

(vi) Søylene i A er lineært uavhengige.

Determinanten til et produkt

Mål: Å vise at $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Lemma: Dersom E er en elementærmatrise, så er

$$\det(EB) = \det(E)\det(B)$$

Bevis: $I_n \overset{s}{\sim} E$, dvs $\det(E) = s \underbrace{\det(I_n)}_{1} = s$

$B \overset{s}{\sim} EB$, dvs $\det(EB) = s\det(B) = \det(E)\det(B)$

Teorem: Hvis A og B er to $n \times n$-matriser, så er

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Bevis (for det tilfellet der A er inverterbar). Siden A er inverterbar, er den et produkt av elementærmatriser $A = E_1E_2E_3 \ldots E_n$. Altså

$$\det(AB) = \det(E_1\underbrace{E_2 \ldots E_nB}) = \det(E_1)\det(\underbrace{E_2 \ldots E_nB}) = \det(E_1)\det(E_2)\det(E_3 \ldots$$

$$= \ldots = \underbrace{\det(E_1)\det(E_2) \ldots \det(E_n)}_{\det(A)?} \cdot \det(B)$$

Det gjenstår altså å vise at $\det(E_1) \cdots \det(E_n) = \det(A)$. Det gjør vi på samme vis

$$\det(A) = \det(E_1\underbrace{E_2 \ldots E_n}) = \det(E_1)\det(\underbrace{E_2 \ldots E_n}) = \ldots = \det(E_1)\det(E_2) \ldots \det($$

Korollar: Dersom A er inverterbar, så er

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Bevis. Siden $I_n = A \cdot A^{-1}$, får vi

$$1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) \quad \Big| \ \frac{1}{\det(A)}$$

så $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

I samme gate:

Setning: For alle $n \times n$-matriser A, så er

$$\det(A^T) = \det(A)$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Utvikling langs andre rader og søyler

Def:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix} + a_{13} \cdots$$

Kan bruke andre rader og søyler dersom vi passer på fortegnsmønsteret.

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & \end{vmatrix}$$

Eksempel:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{\text{Utvikler etter annen rad}}{=} -1 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$- 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \text{ ----- osv.}$$

Eksempel

$$\begin{array}{cccc} + & - & + & \\ \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} \; \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} \; \end{vmatrix}$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} \cdots$$

Hvorfor?

$$\begin{vmatrix} & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ & & & & \end{vmatrix} \underset{\sim}{\pm 1} \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \end{vmatrix}$$

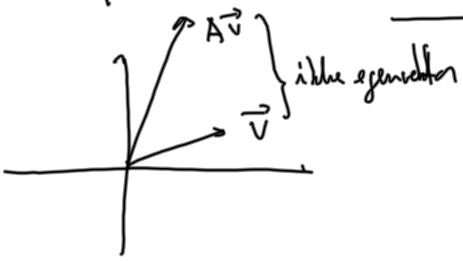
Søyler: $\det(A^T) = \det(A)$

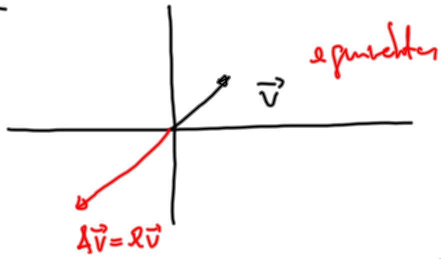
Egenverdier og egenvektorer (4.10)

La A være $n \times n$-matrise. En vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ kalles en egenvektor for A dersom $A\vec{v}$ er parallell med $\vec{v}$, dvs at

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v}$$

for et tall λ. I så fall kalles λ egenverdien til $\vec{v}$.





Kommentar: λ og $\vec{v}$ kan være komplekse selv om A er reell.

Observasjon: Dersom $\vec{v}$ er en egenvektor, så vil $a\vec{v}$ også være en egenvektor for alle tall $a \neq 0$.

Bevis: $A(a\vec{v}) = a\underbrace{A\vec{v}}_{\lambda v} = a\lambda\vec{v} = \lambda(a\vec{v})$

Hvordan finner vi egenverdier og egenvektorer?

Egenvektorer/verdier:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} = \lambda I\vec{v}$$

dvs

$$\vec{0} = \lambda I\vec{v} - A\vec{v} = (\lambda I - A)\vec{v}$$

dvs

$$\underbrace{(\lambda I - A)}_{\text{matrise}}\vec{v} = \vec{0} \qquad \vec{v} \neq \vec{0} \qquad B\vec{x} = \vec{0}$$

Skal $\vec{v}$ være en egenvektor for A med egenverdi λ, må altså $(\lambda I - A)\vec{v} = \vec{0}$ ha en løsning forskjellig fra $\vec{0}$, og det er bare mulig når $\det(\lambda I - A) = 0$.

<u>Setning:</u> λ er en egenverdi for matrisen A hvis og bare hvis $\det(\lambda I - A) = 0$.

<u>Eksempel:</u> Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Ser på

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 4 & -1 \\ -3 & \lambda - 2 \end{bmatrix}$$

Må finne ut når $\det(\lambda I - A) = 0$.

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -1 \\ -3 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda-4)(\lambda-2) - (-1)(-3) = \lambda^2 - 6\lambda + 8 - 3$$
$$= \lambda^2 - 6\lambda + 5$$

Må løse annengradslikningen $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$.

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2\cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$$

Egenverdiene er $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 1$. Skal finne egenvektorene $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$

For $\vec{v}_1$: $A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$

Hvis $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, så får vi

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 4x + y &= 5x \Rightarrow -x + y = 0 \\ 3x + 2y &= 5y \Rightarrow 3x - 3y = 0 \end{aligned}\right\},$$

Velger $x = 1$, og får $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

For $\vec{v}_2$: $A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2$: Med $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 4x + y &= x \Rightarrow 3x + y = 0 \\ 3x + 2y &= y \quad\;\; 3x + y = 0 \end{aligned}\right\} y=$$

Velger $x = 1$, får $y = -3$, dvs

$$\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$