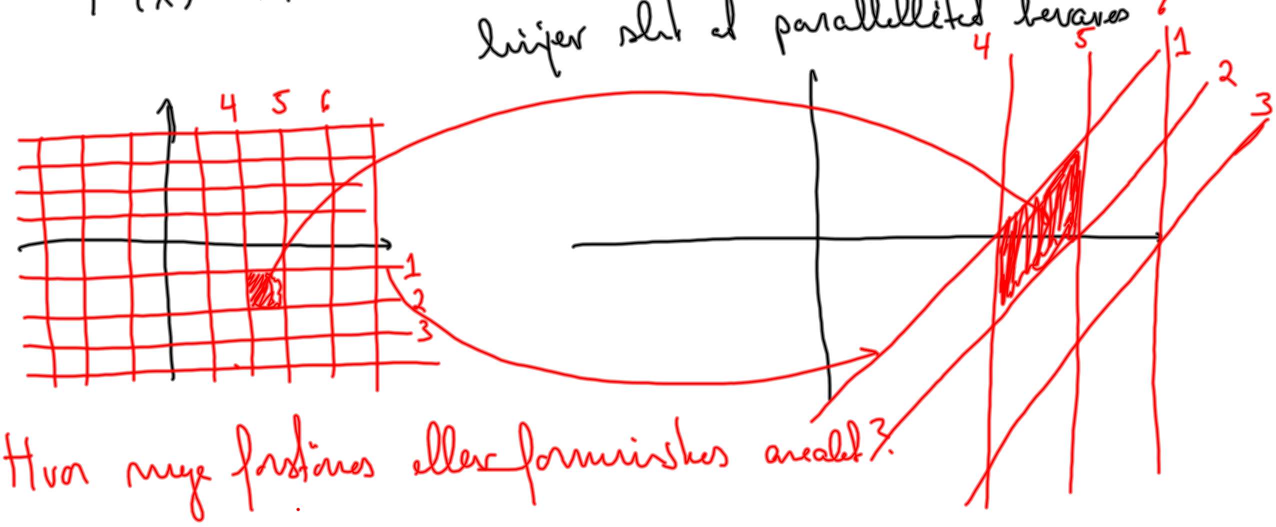
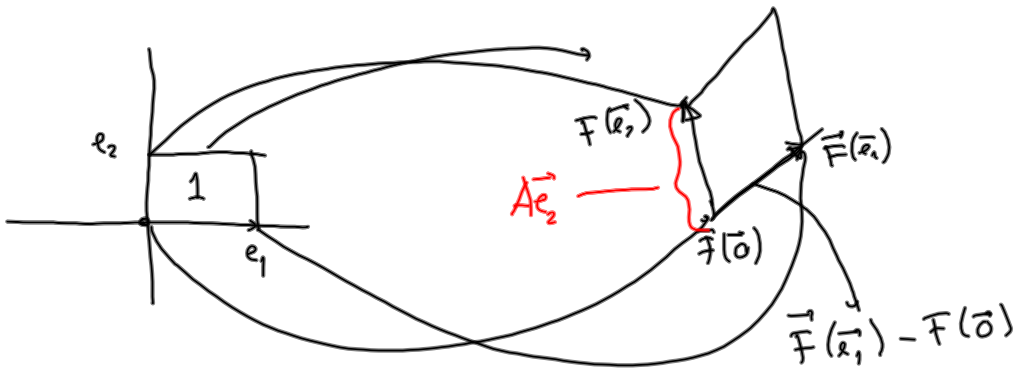
Affinavbildninger

$\vec{F}(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{c}$ Avbilder rette linjer på rette linjer slik at parallellitet bevares



Hvor mye forstörres eller forminskes arealet?



$$= A\vec{e}_1 + \cancel{\vec{c}} - (\underbrace{A\vec{0}}_{\vec{0}} + \cancel{\vec{c}}) = A\vec{e}_1$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

$$A\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

Areal av parallellogram: $\left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right| = |\det A|$

Konklusjon: Affinavbildningen $\vec{F}(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{c}$ "forstörrer" arealer med faktoren $|\det(A)|$

Linearisering:

Husk: $\vec{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ er deriverbar i $\vec{a}$ dersom

$$\vec{F}(\vec{a}+\vec{r}) = \vec{F}(\vec{a})+\vec{F}'(\vec{a})\vec{r}+\underbrace{\vec{\sigma}(\vec{r})}_{\text{går mot null raskere enn } \vec{r}}$$

For liten $\vec{r}$

$$\vec{F}(\vec{a}+\vec{r})\approx\vec{F}(\vec{a})+\vec{F}'(\vec{a})\vec{r}$$

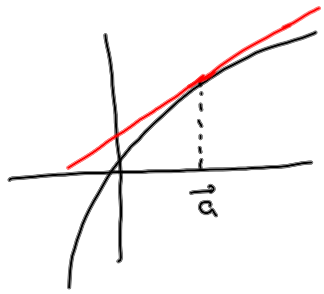
$\vec{x}=\vec{a}+\vec{r}$

$\vec{r}=\vec{x}-\vec{a}$

dvs

$$\vec{F}(\vec{x})\approx\vec{F}(\vec{a})+\vec{F}'(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a}) \quad \text{for } \vec{x}\approx\vec{a}$$

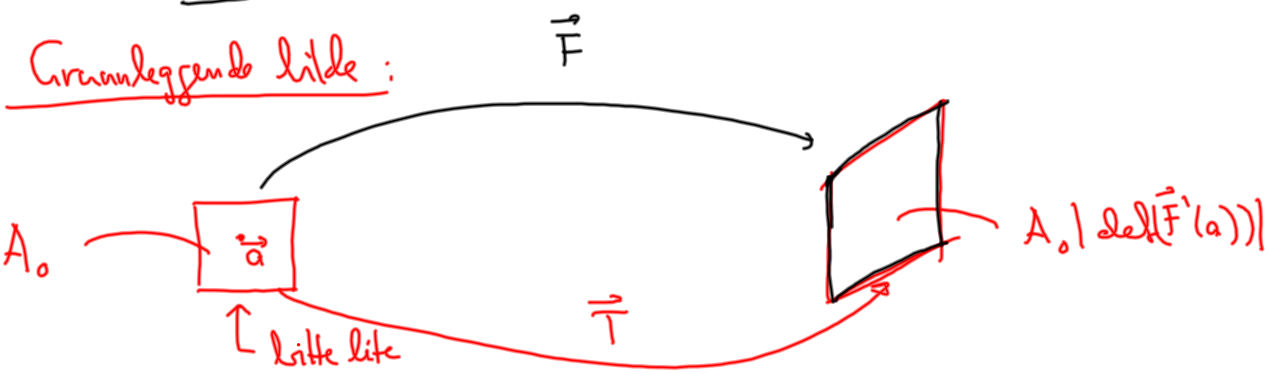
$$=\underbrace{\underbrace{\vec{F}'(\vec{a})}_{\text{matrise}}\vec{x}+\underbrace{\vec{F}(\vec{a})-\vec{F}'(\vec{a})\vec{a}}_{\text{vektor}}}_{\text{lineariseringen til } \vec{F}} \quad \text{affinavbildning}$$



Affinavbildning: $\vec{T}(\vec{x})=\vec{F}(\vec{a})+\vec{F}'(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a})$

kalles lineariseringen av $\vec{F}$ i punktet $\vec{a}$

Grunnleggende bilde:



Konklusjon: Når vi bruker avbildningen $\vec{F}$ på et lite område rundt punktet $\vec{a}$, endrer arealet seg med en faktor $|\underbrace{\det(\vec{F}'(\vec{a}))}_{\text{Jacobi-determinanten}}|$ med god tilnærmelse.