Egenverdier og egenvektor

Husk: Hvis $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, så er λ en egenverdi og $\vec{v}$ en egenvektor for A.

λ er en egenverdi for A hvis og bare hvis $\det(\lambda I - A) = 0$.

Når vi regner ut $\det(\lambda I - A)$, får vi et n-te gradspolynom som kalles det karakteristiske polynomet til A

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A).$$

Egenverdiene er røttene til dette polynomet.

Algebraens fundamentalteorem: Ethvert n-te gradspolynom har nøyaktig n røtter, dersom vi teller med multiplisitet og godtar komplekse røtter.

Eksempel: Finn egenverdiene og egenvektorene til

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Finner først egenverdiene:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda-2)^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow \lambda - 2 = \pm i$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2 \pm i$$

To egenverdier: $\lambda_1 = 2+i$, $\lambda_2 = 2-i$

Egenvektor til λ_1: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: $A\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2+i)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \cancel{2x} + y = \cancel{2x} + ix \\ -x + \cancel{2y} = \cancel{2y} + iy \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = ix \\ -x = iy \end{matrix}\right\} \text{sier det samme}$$

Velger $x = 1$, og får $y = i$

Altså: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Egenvektor til λ_2: $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: $A\vec{v}_2 = \lambda_2\vec{v}_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2-i)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \cancel{2x} + y = \cancel{2x} - ix \\ -x + \cancel{2y} = \cancel{2y} - iy \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = -ix \\ x = iy \end{matrix}\right\} \text{sier det samme}$$

Velger $x = 1$, $y = -i$

Altså: $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

OBS: Hvis A er en reell matrise, så kommer de komplekse egenverdiene i konjugerte par. De tilhørende egenvektorene er også kompleks konjugerte av hverandre.

Eksempel: Finn egenverdier og egenvektorer til

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finner egenverdier:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-1) + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 + 1$$
$$= \lambda^2 - 4\lambda + 4.$$

Setter dette lik 0: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 0}{2} = \underline{\underline{2}}$$

$$\boxed{\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda-2)^2}$$

Egenvektor: $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} 3x + y = 2x & \Rightarrow & x + y = 0 \\ -x + y = 2y & \rightarrow & -x - y = 0 \end{matrix} \Bigg\} \; x = -y$$

Velger $y = 1$, $x = -1$

Egenvektor: $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Denne matrisen har altså ikke en basis av egenvektorer!

Basis av egenvektorer:

Vi sier at en $n\times n$-matrise A har en basis av egenvektorer dersom det finnes n lineært uavhengige egenvektorer $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$. Dette betyr at enhver vektor kan skrives som en lineærkombinasjon

$$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n$$

på nøyaktig én måte.

Matrisen i eksempelet ovenfor har ikke denne egenskapen.

Vi har to viktige resultater:

Setning: Dersom $n\times n$-matrisen A har n forskjellige egenverdier, så har A en basis av egenvektorer. Hvis alle egenverdiene er reelle vil basis bestå av reelle vektorer, hvis ikke vil noen av egenvektorene være komplekse.

Definisjon: En matrise A er symmetrisk dersom $a_{ij} = a_{ji}$ for alle i, j. Det er det samme som at $A^T = A$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Spektralteorem for symmetriske matriser: En symmetrisk matrise har alltid en basis av reelle egenvektorer. Vi kan dessuten velge basis slik at den er ortonormal

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i \neq j \\ 1 & \text{hvis } i = j \end{cases}$$

Hvorfor er basiser av egenvektorer viktig?

$$\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n \quad , \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \text{ er egenvektorer}$$

$$A\vec{x} = A(c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n) = c_1\lambda_1\vec{v}_1 + c_2\lambda_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\lambda_n\vec{v}_n$$

$$A^2\vec{x} = A(A\vec{x}) = A(c_1\lambda_1\vec{v}_1 + c_2\lambda_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\lambda_n\vec{v}_n)$$
$$= c_1\lambda_1^2\vec{v}_1 + c_2\lambda_2^2\vec{v}_2 + \dots + c_n\lambda_n^2\vec{v}_n$$

Generelt:

$$A^k\vec{x} = c_1\lambda_1^k\vec{v}_1 + c_2\lambda_2^k\vec{v}_2 + \dots + c_n\lambda_n^k\vec{v}_n$$

<u>Eksempel</u>: Dyrearter i samspill $<$ byttedyr: x_n dyr etter n år
rovdyr: y_n dyr etter n år

Overgang mellom år:

$$x_{n+1} = 1.2\, x_n - 0.2 y_n \qquad x_0 = 400$$

$$y_{n+1} = 0.9 y_n + 0.1 x_n \qquad y_0 = 300$$

Hvor mange dyr er det etter n år?

La $\vec{x}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ og $A = \begin{pmatrix} 1.2 & -0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$. Da har vi

$$\vec{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2\, x_n - 0.2 y_n \\ 0.1 x_n + 0.9 y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 & -0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A\vec{x}_n$$

<u>Ligningssystem på matriseform</u>: $\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n$, $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \end{pmatrix}$

$$\vec{x}_0,\ \vec{x}_1 = A\vec{x}_0,\ \vec{x}_2 = A\vec{x}_1 = A^2\vec{x}_0,\ \vec{x}_3 = A\vec{x}_2 = A^3\vec{x}_0, \dots,\ \vec{x}_n = A^n x_0$$

La oss finne egenverdiene og egenvektorene til A:

$$0 = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1.2 & 0.2 \\ -0.1 & \lambda - 0.9 \end{vmatrix} = (\lambda - 1.2)(\lambda - 0.9) + 0.02$$

$$= \lambda^2 - 0.9\lambda - 1.2\lambda + \overbrace{1.2 \cdot 0.9}^{1.08} + 0.02$$

$$= \lambda^2 - 2.1\lambda + \overbrace{1.1}^{0.1}$$

<u>Løsninger</u>:

$$\lambda = \frac{2.1 \pm \sqrt{(2.1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1.1}}{2 \cdot 1} = \frac{2.1 \pm \sqrt{4.41 - 4.4}}{2} = \begin{cases} 1.1 \\ 1 \end{cases}$$

<u>Egenverdier</u>: $\lambda_1 = 1.1$, $\lambda_2 = 1$

Egenvektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: $A\vec{v}_1 = \lambda_1 \vec{v}_1$

$$\begin{pmatrix} 1.2 & -0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1.1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 1.2x - 0.2y = 1.1x \\ 0.1x + 0.9y = 1.1y \end{matrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 0.1x - 0.2y = 0 \\ 0.1x - 0.2y = 0 \end{matrix}\right\} x = 2y$$

Velger $y = 1$, får $x = 2$,

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Tilsvarende regninger</u> for $\lambda_2 = 1$, gir $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Siden $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ danner en basis, kan enhver vektor skrives som en lineærkombinasjon av disse: $\vec{x} = c\vec{v}_1 + d\vec{v}_2$. Spesielt kan vi skrive $\vec{x}_n$ som en slik lineærkombinasjon

$$\vec{x}_n = c_n\vec{v}_1 + d_n\vec{v}_2$$

<u>Poeng</u>: Mye lettere å finne c_n og d_n enn x_n og y_n!

Vi har

$$\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n$$

dvs

$$c_{n+1}\vec{v}_1 + d_{n+1}\vec{v}_2 = A(c_n\vec{v}_1 + d_n\vec{v}_2) = c_n\lambda_1\vec{v}_1 + d_n\lambda_2\vec{v}_2$$

Siden $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ er lin. uavhengige, så må

$$c_{n+1} = \lambda_1 c_n \quad \text{og} \quad d_{n+1} = \lambda_2 d_n$$

Dette betyr at

$$\cancel{c_n} = \lambda_1^n c_0 = 1.1^n c_0$$

$$d_n = \lambda_2^n d_0 = 1^n d_0 = d_0$$

Hva er c_0 og d_0? Vi vet

der $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{x}_0 = c_0\vec{v}_1 + d_0\vec{v}_2$$

$$\begin{pmatrix} 400 \\ 300 \end{pmatrix} = c_0\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + d_0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2c_0 + d_0 = 400 \\ c_0 + d_0 = 300 \end{matrix}$$

I−II $c_0 = 400 - 300 \Rightarrow c_0 = 100$

$d_0 = 200$

Dermed er $c_n = 100 \cdot 1.1^n$, $d_n = 200$

Til slutt får vi

$$\vec{x}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = c_n\vec{v}_1 + d_n\vec{v}_2 = 100 \cdot 1.1^n\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 200\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \cdot 1.1^n + 200 \\ 100 \cdot 1.1^n + 200 \end{pmatrix}$$

<u>Løsning</u>:

$$\boxed{\begin{matrix} x_n = 200 \cdot 1.1^n + 200 \\ y_n = 100 \cdot 1.1^n + 200 \end{matrix}}$$