<u>Husk fra forrige gang:</u> Matriseligning $A\vec{x}=\vec{b}$ er bare en annen formulering av ligningssystemet

$$(*)\quad \begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}$$

Dette betyr at matriseligningen $A\vec{x}=\vec{b}$ har en entydig løsning for alle $\vec{b}$ hvis og bare hvis

(i) A er en kvadratisk matrise, dvs $n=m$.

(ii) Trappeformen til A har et pivotelement i alle søyler og alle linjer, dvs at den reduserte trappeformen til $A=I_n$.

I disse tilfellene har ligningene en spesiell grei løsning.

$$[A,\vec{b}]\sim \ldots\ldots \sim [I_n,\tilde{\vec{b}}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{b}_2 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & \tilde{b}_n \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$ ligningssystem

$x_1=\tilde{b}_1$
$x_2=\tilde{b}_2$
$\vdots$
$x_n=\tilde{b}_n$

$\uparrow \vec{x}$

Anta at vi skal løse mange matriseligninger med samme venstreside:

$$A\vec{x}_1=\vec{b}_1,\ A\vec{x}_2=\vec{b}_2,\ \ldots,\ A\vec{x}_k=\vec{b}_k$$

<u>Løsning:</u>

$$[A,\vec{b}_1,\vec{b}_2,\ldots,\vec{b}_k]\sim[I_n,\tilde{\vec{b}}_1,\tilde{\vec{b}}_2,\ldots,\tilde{\vec{b}}_k]$$

$\uparrow \vec{x}_1 \quad \uparrow \vec{x}_2,\ \ldots,\ \vec{x}_k$

Inverse matriser (4.3)

I dette avsnittet er alle matriser kvadratiske (dvs $n=m$)

Definisjon: Anta at A er en $n\times n$-matrise. Vi sier at en $n\times n$-matrise B er invers til A dersom

$$AB = BA = I_n$$

MAT 1100: Et matrise A har høyst en invers, og den betegnes ved A^{-1}.

Oppgaver: (i) Finne ut hvilke matriser som har en invers.
(ii) Finne en metode for å regne ut den inverse (når den finnes)

Lemma: Hvis A, B er to $n\times n$-matriser slik at $A\vec{x} = B\vec{x}$ for alle $\vec{x}$, så $A=B$.

Bevis: Bruker vi nå $\vec{x} = \vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ser vi at

$$A\vec{e}_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

$$B\vec{e}_i = \cdots\cdots = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{pmatrix}$$

i-te søyle i A er lik i-te søyle i B, altså matrisene like.

Liten observasjon: A, B $n\times n$-matriser, $B = [\underbrace{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n}_{\text{søyler i } B}]$

$$AB = [A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, \ldots, A\vec{b}_n]$$

Setningen: Anta at $AB = I_n$ (B er en høyreinvers til A). Da har ligning $A\vec{x} = \vec{c}$ en entydig løsning for alle $\vec{c}$, og løsningen av $A\vec{x} = \vec{e}_i$ er $\vec{b}_i$ (den i-te søylen i B). Spesielt er A radekvivalent med I_n (dvs den reduserte trappeformen til A er I_n)

Bevis: Vi har $I_n = AB = [A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, \dots, A\vec{b}_n]$ altså er $A\vec{b}_i = \vec{e}_i$ for alle i.
$I_n = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n]$

Vi skal må vise at $A\vec{x} = \vec{c}$ har en løsning for alle $\vec{c}$:
Anta at $\vec{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + \dots + c_n\vec{e}_n$. Sett

$$\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \dots + c_n\vec{b}_n$$

Da er

$$A\vec{x} = A(c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \dots + c_n\vec{b}_n) = c_1A\vec{b}_1 + c_2A\vec{b}_2 + \dots + c_nA\vec{b}_n$$
$$= c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + \dots + c_n\vec{e}_n = \vec{c}$$

så ligningen $A\vec{x} = \vec{c}$ har (minst én) løsning for alle $\vec{c}$.
Det gjenstår å vise at løsningen er entydig. Siden $A\vec{x} = \vec{c}$ har en løsning for alle $\vec{c}$, må trappeformen til A ha et pivotelement i hver linje. Siden A er kvadratisk, må det da være et pivotelement i hver søyle, og følgelig er løsning entydig. Dette betyr spesielt at den reduserte trappeformen til A er I_n.

Setning: Anta at $\underbrace{AB = I_n}$. Da er også $\underbrace{BA = I_n}$ og A og B er altså inverse av hverandre.

Bevis: Vi skal vise at $BA = I_n$ og da er det nok å sjekke at $(BA)\vec{x} = I_n\vec{x} = \vec{x}$ for alle vektorer $\vec{x}$.

Sett $\vec{y} = (BA)\vec{x}$; da må vi vise at $\vec{y} = \vec{x}$. La $\vec{c} = A\vec{x}$. Da er

$$A\vec{y} = A((BA)\vec{x}) = \underbrace{(AB)}_{I_n}\underbrace{(A\vec{x})}_{\vec{c}} = I_n\vec{c} = \vec{c}$$

Fra før av vet vi at $A\vec{x} = \vec{c}$. Dermed er $A\vec{x} = \vec{c}$ og $A\vec{y} = \vec{c}$. Siden denne ligningen har entydig løsning, må $\vec{x} = \vec{y}$.

Dermed er $y = (BA)\vec{x}$ lik $\vec{x}$ for alle x, og dermed er $BA = I_n$.

Teorem: En $n\times n$-matrise A har en invers hvis og bare hvis ligningen $A\vec{x} = \vec{b}$ har en entydig løsning for alle $\vec{b}$; dvs når den reduserte trappeformen til A er I_n.

Bevis: Anta at A har en invers B. Vi må vise at da har $A\vec{x} = \vec{b}$ en entydig løsning for alle $\vec{b}$. Siden $AB = I_n$, følger dette fra én av setningene ovenfor.

Omvendt, hvis $A\vec{x} = \vec{b}$ har en entydig løsning for alle $\vec{b}$, så la $\vec{b}_i$ være slik at
$$A\vec{b}_i = \vec{e}_i$$

Da er $$A\cdot\underbrace{[\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n]}_{B} = [\underbrace{A\vec{b}_1}_{\vec{e}_1}, \underbrace{A\vec{b}_2}_{\vec{e}_2}, \dots, \underbrace{A\vec{b}_n}_{\vec{e}_n}] = I_n$$

Altså er A og B inverse av hverandre ifølge forrige setning.

Løsbarhet av ligninger: Dersom A er invertibar, så er løsningen av ligningen $A\vec{x} = \vec{b}$ gitt ved $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Bevis: $A^{-1} \mid \quad A\vec{x} = \vec{b}$

$$\underbrace{A^{-1}A}_{I_n}\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Hvordan finner vi den inverse til en matrise?

A gitt matrise. Ønsker å finne den inverse matrisen $B=[\vec{x}_1,\vec{x}_2,..,\vec{x}_n]$

$$[A\vec{x}_1, A\vec{x}_2,..,A\vec{x}_n] = AB = I_n = [\vec{e}_1,\vec{e}_2,..,\vec{e}_n]$$

Søyler: den inverse matrisen er gitt ved

$$\underbrace{A\vec{x}_1=\vec{e}_1,\ A\vec{x}_2=\vec{e}_2,\ \ldots,\ A\vec{x}_n=\vec{e}_n}_{\text{Ligninger med samme venstreside}}$$

$$[A|I_n] = [A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n] \sim \ldots \sim [I_n | \tilde{\vec{e}}_1, \tilde{\vec{e}}_2, \ldots, \tilde{\vec{e}}_n] = [I_n | A^{-1}].$$

__Eksempel:__ Finn den inverse matrisen til $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&4&-1\\1&3&-1\end{bmatrix}$.

$-2\ -4\ -2\ -2\ 0\ 0$

$$[A|I_n] = \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\2&4&-1&0&1&0\\1&3&-1&0&0&1\end{array}\right] \underset{III-I}{\overset{II-2I}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&0&-3&-2&1&0\\0&1&-2&-1&0&1\end{array}\right]$$

$-1\ -2\ -1\ -1\ 0\ 0$

$0\ 0\ -1\ -\frac{2}{3}\ \frac{1}{3}\ 0$

$$\overset{II \leftrightarrow III}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&1&-2&-1&0&1\\0&0&-3&-2&1&0\end{array}\right] \overset{-\frac{1}{3}III}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&1&1&0&0\\0&1&-2&-1&0&1\\0&0&1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\end{array}\right]$$

$0\ 0\ 2\ \frac{4}{3}\ -\frac{2}{3}\ 0$

$$\underset{I-III}{\overset{II+2III}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\0&1&0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&1\\0&0&1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\end{array}\right] \overset{I-2II}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{3}&\frac{5}{3}&-2\\0&1&0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&1\\0&0&1&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0\end{array}\right]$$

$0\ -2\ 0\ -\frac{2}{3}\ \frac{4}{3}\ -2$

$$\underbrace{}_{I_n} \quad \underbrace{}_{A^{-1}}$$

__MATLAB:__ inv(A)