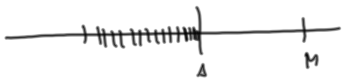
Positive rekker

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ kalles **positiv** dersom $a_n \geq 0$ for alle n.

Grunnleggende observasjon: En positiv rekke konvergerer hvis og bare hvis den er begrenset (dvs at det finnes et tall M slik at $s_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \leq M$ for alle N.



Forrige gang:

Integraltesten: $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergerer $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergerer.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergerer $\Leftrightarrow p > 1$.

Flere tester:

kjente konvergens-egenskaper. konvergerer eller ikke!

Sammenligningstesten: Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er to positive rekker:

(i) Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer og $a_n \geq b_n$ for alle n, da konvergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(ii) Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer og $a_n \leq b_n$ for alle n, da divergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Grensesammenligningstesten: Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er to positive rekker.

(i) Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer og $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} < \infty$, så konvergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(ii) Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer og $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} > 0$, så divergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Eksempel: Avgjør om $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{n^3+7}$ konvergerer eller divergerer. $\leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Kanskje dette er a_n?

Kladd: $\frac{n^2+n}{n^3+7} = \frac{n^2(1+\frac{1}{n})}{n^3(1+\frac{7}{n^3})} = \frac{1}{n} \frac{(1+\frac{1}{n})}{(1+\frac{7}{n^3})}$

rekken

Prøver meg med $a_n = \frac{1}{n}$, dvs. sammenligning med den divergente rekken $\sum \frac{1}{n}$ $\leftarrow \sum a_n$

Vi har

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2+n}{n^3+7}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\frac{1}{n}} \frac{(1+\frac{1}{n})}{(1+\frac{7}{n^3})}}{\cancel{\frac{1}{n}}} = 1 > 0.$$

Siden grenseverdien er større enn null, divergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{n^3+7}$.

Eksempel: Undersøk om $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ konvergerer. $\leftarrow \sum b_n$

Kladd: For små x er $\sin x \sim x$, og dermed burde $\sin \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$: Sammenligner med $\sum \frac{1}{n^2}$? konvergent. $\leftarrow \sum a_n$

Sammenligner med $\sum \frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)\cancel{\left(-2\frac{1}{n^3}\right)}}{\cancel{\left(-2\frac{1}{n^3}\right)}} = \underline{\underline{1}} < \infty$$

Konklusjon: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ konvergerer.

Forholdstesten: Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er en positiv rekke.

(i) Hvis $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, så konvergerer rekken.

(ii) Hvis $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, så divergerer rekken.

(iii) Hvis $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, så gir testen ingen konklusjon.

Eksempel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\cancel{2^{n+1}}} \cdot \frac{\cancel{2^n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{2} < 1$$

konvergens!

Eksempel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}} = \lim \frac{n^p}{(n+1)^p} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{(1+\frac{1}{n})^p}} = 1 \text{, ingen konklusjon.}$$

Rottesten: Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er en positiv rekke:

(i) Hvis $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, så konvergerer $\sum a_n$

(ii) Hvis $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, så divergerer $\sum a_n$

(iii) Hvis $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, så gir testen ingen konklusjon.

$\sqrt[n]{a_n} = (a_n)^{1/n}$

Eksempel: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\sin\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\sin\tfrac{1}{n}\right)^{n^2}\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\sin\tfrac{1}{n}\right)^{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(e^{\ln(1-\sin\frac{1}{n})}\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{\underbrace{n}_{\to\infty}\,\underbrace{\ln(1-\sin\frac{1}{n})}_{\to 0}}$$

Mellomregning: $\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1-\sin\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1-\sin\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1-\sin\frac{1}{n}}\left(-\cos\frac{1}{n}\cancel{\left(-\frac{1}{n^2}\right)}\right)}{\cancel{\left(-\frac{1}{n^2}\right)}} = \lim_{n\to\infty} -\frac{\overset{\to 1}{\cos\frac{1}{n}}}{\underbrace{1-\sin\frac{1}{n}}_{\to 1}} = \underline{\underline{-1}}$$

Altså: $\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e^{\overset{\to -1}{n\ln(1-\sin\frac{1}{n})}} = e^{-1} < \underline{\underline{1}}$, konvergens.

23/5 kl. 9.00 – ABELFROKOST PÅ VB (GRATIS MAT)

24/5 kl. 18.04 PUB M/ PROFESSOR } RF-KJELLEREN

25/5 kl. 18.04 KJELLERMESTERKVELD } RF-KJELLEREN

KAFEEN ÅPEN ~~HE~~ MAN–TORS 10–16

Alternerende rekker (12.3)

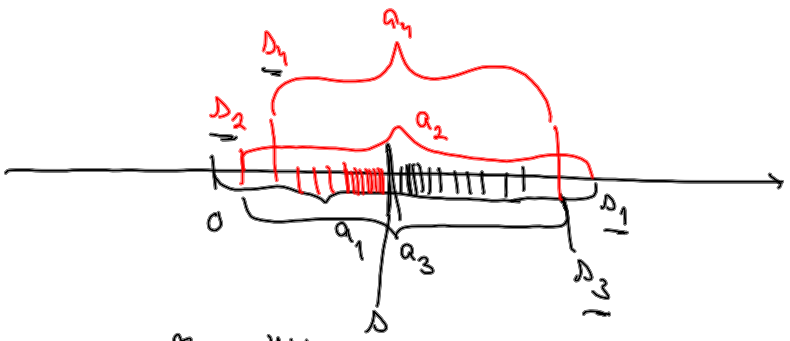
En rekke $\sum a_n$ er alternerende dersom a_n og a_{n+1} alltid har motsatt fortegn.

Eksempel: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Alternerende rekke test: Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er en alternerende rekke der størrelsen $|a_n|$ til leddene avtar mot null. Da konvergerer rekken mot en sum s, og

$$|s-s_N| < |a_{N+1}|$$

Bevisskissen.



Eksempel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ vis at rekken konvergerer og beregn med en nøyaktighet bedre enn $\frac{1}{10}$

Konvergens: $|a_n| = \frac{1}{n}$ avtar mot null, altså konvergens.

$$|s-s_n| < |a_{n+1}|$$

$$|s-s_9| < \frac{1}{10}$$

$s_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}$ tilnærmelse til s med nøyaktighet $\le \frac{1}{10}$

Absolutt konvergens (12.4)

Definisjon: Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer absolutt dersom $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerer.

Setning: En absolutt konvergent rekke konvergerer.

Bevis: Siden $\sum a_n$ er absolutt konvergent, konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerer $\Leftrightarrow$ Følgen av delsummer $t_N = \sum_{n=1}^{N} |a_n|$ konvergerer

$\Leftrightarrow$ $\{t_n\}$ er en Cauchy-følge $\Leftrightarrow$ $|t_{n+k} - t_n| < \varepsilon$ ved å velge n stor nok

$\Leftrightarrow$ $\sum_{m=n+1}^{n+k} |a_m| < \varepsilon$ når n er stor nok

$\Leftrightarrow$ $\left| \sum_{m=n+1}^{n+k} a_m \right| < \varepsilon$ når n er stor nok

$\Leftrightarrow$ $|s_{n+k} - s_n| < \varepsilon$ når n stor nok

$\Leftrightarrow$ $\{s_n\}$ er Cauchy-følge

$\Leftrightarrow$ $\{s_n\}$ er konvergent

$\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer

Eksempel: Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ der er konvergent, men ikke absolutt konvergent siden $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
divergent.

Definisjon: En rekke som er konvergent, men ikke absolutt konvergent, kalles betinget konvergent.

Forholdstest og rottest for generelle rekker. Anta at $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er en rekke. Da gjelder:

(i) Dersom $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ eller $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, så konvergerer rekken absolutt

(ii) Dersom $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ eller $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$, så divergerer rekken absolutt.

(iii) Hvis grenseverdien er 1, gir testene ingen konklusjon.

Program: Ser på rekker av funksjoner: $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)}_{\text{Konvergensområde}}$

Potensrekker: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$