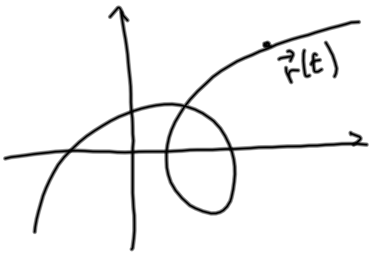
Parametriserte kurver



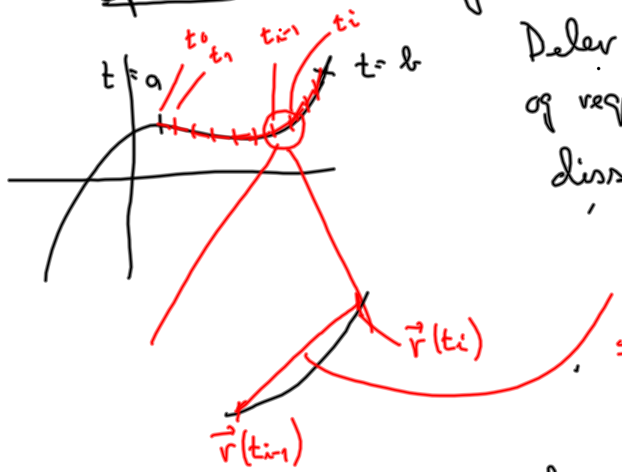
En parametrisert kurve i $\mathbb{R}^n$ er en funksjon $\vec{r}: I \to \mathbb{R}^n$, der I er et intervall, slik at

$$\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

har kontinuerlige komponenter $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Ofte lønner det seg å tenke på t som tiden og $\vec{r}(t)$ som posisjonen ved tiden t.

<u>Spørsmål</u>: Hvor lang er en slik kurve?



Deler opp i små, rette linjestykker og regner ut den totale lengden til disse.

$$l_i = |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})|$$
$$= \sqrt{(x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}))^2 + \dots + (x_n(t_i) - x_n(t_{i-1}))^2}$$

Total lengde for bruddenstien:

$$L = l_1 + l_2 + \dots + l_n = \sum_{i=1}^{n} l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}))^2 + \dots + (x_n(t_i) - x_n(t_{i-1}))^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\underbrace{\left(\frac{x_1(t_i) - x_1(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2}_{\approx x_1'(t_i)^2} + \dots + \underbrace{\left(\frac{x_n(t_i) - x_n(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2}_{\approx x_n'(t_i)^2}}\,(t_i - t_{i-1})$$

$$\boxed{\underbrace{\sum f(t_i^*)(t_i - t_{i-1})}_{\text{Riemann-sum}}}$$

$$\approx \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_1'(t_i)^2 + x_2'(t_i)^2 + \dots + x_n'(t_i)^2}\,(t_i - t_{i-1})}_{\text{Riemann-sum til } \sqrt{x_1'(t)^2 + \dots + x_n'(t)^2}}$$

$$\Longrightarrow \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \dots + x_n'(t)^2}\,dt$$

<u>Definisjon</u>: Anta at $\vec{r}: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ er en parametrisert kurve der komponentene $x_1, x_2, \dots, x_n$ har kontinuerlige deriverte. Da definerer vi <u>buelengden</u> til kurven til å være

$$L(a,b) = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \dots + x_n'(t)^2}\,dt.$$

Eksempel: Finn buelengden til kurven

$\vec{r}(t) = t^4\vec{i} + t^5\vec{j} = (t^4, t^5)$ fra $t=0$ til $t=1$

$$L(0,1) = \int_0^1 \sqrt{(4t^3)^2 + (5t^4)^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{16t^6 + 25t^8}\,dt$$

$$\boxed{u = 16 + 25t^2} \Rightarrow t^2 = \frac{u-16}{25}$$

$$du = 50t\,dt$$

$$= \int_0^1 t^3 \sqrt{\underbrace{16+25t^2}_{u}}\,\frac{dt}{t}$$

$$= \int_{16}^{41} \frac{u-16}{25}\sqrt{u}\,\frac{du}{50} = \frac{1}{1250}\int_{16}^{41} (u^{3/2} - 16u^{1/2})\,du =$$

$$= \frac{1}{1250}\left[\frac{2}{5}u^{5/2} - 16\,\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_{16}^{41} = \ldots\ldots \text{ Sett inn.}$$

Hvis vi starter i a og måler buelengden fra a til t, får vi

$$s(t) = L(a,t) = \int_a^t \sqrt{x_1'(s)^2 + x_2'(s)^2 + \dots + x_n'(s)^2}\,ds$$

Deriverer vi, får vi

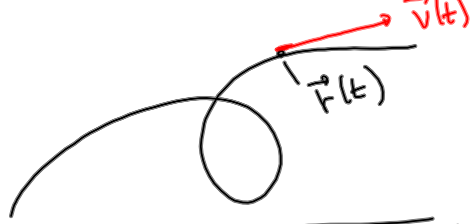
$$s'(t) = \underbrace{\sqrt{x_1'(s)^2 + x_2'(s)^2 + \dots + x_n'(s)^2}}_{v(t)} \overset{?}{=} \text{farten ?}$$

Derivasjon og hastighet.

$\vec{v}(t)$ – hastighetsvektoren

lengden = farten

retningen = bevegelsesretningen.

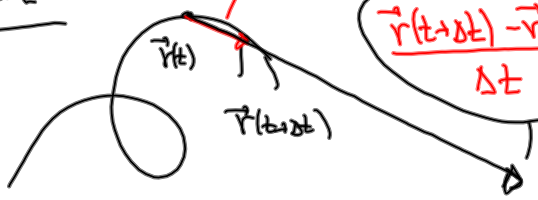


Se på gjennomsnittshastighet

$\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$

Forflytning per tidsenhet:

$$\frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$



Grenseverdien:

$$\vec{r}\,'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

kalles den deriverte til $\vec{r}$ i punktet t. Den vektoren er en tangent til kurven og dersom t representerer tiden, kaller vi $\vec{r}\,'(t)$ for hastigheten i punktet t og skriver

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$$

Verdande.eventbrite.com

01.feb 17:30 Escape

$$\vec{r}\,'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \vec{v}(t) \quad \text{hastighet.}$$

Hvis $\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, så er

$$\vec{r}\,'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{x_1(t+\Delta t) - x_1(t)}{\Delta t}, \frac{x_2(t+\Delta t) - x_2(t)}{\Delta t}, \dots, \frac{x_n(t+\Delta t) - x_n(t)}{\Delta t} \right)$$

$$= (x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_n'(t))$$

Eksempel: $\vec{r}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$

$$\vec{r}\,'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)$$

Hastighet og fart: Hastighet er en vektor: $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$

Fart er en skalar: $v(t) = |\vec{v}(t)|$

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \dots + x_n'(t)^2}$$

Farten i eksemplet ovenfor: $v(t) = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1^2}$

$$= \sqrt{\cos^2 t - \cancel{2t\cos t\sin t} + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + \cancel{2t\cos t\sin t} + t^2\cos^2 t + 1}$$

$$= \sqrt{1 + t^2 + 1} = \underline{\underline{\sqrt{2+t^2}}}$$

Annenderiverte:

$$\vec{r}\,''(t) = (x_1''(t), x_2''(t), \dots, x_n''(t))$$

Når t er tiden, kalles $\vec{r}\,''(t)$ for akselerasjon.

Vi ser $\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t)$.

OBS: Baneakselerasjonen $a(t)$ er definert ved

$$a(t) = v'(t).$$

Generelt er: $a(t) \neq |\vec{a}(t)|$

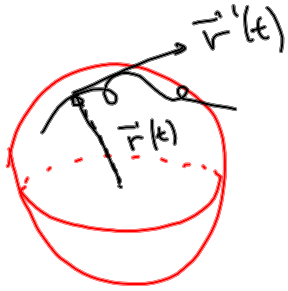
Eksempel: $\vec{r}(t) = (R\cos t, R\sin t)$ sirkelbevegelse

Hastigheten: $\vec{v}(t) = (-R\sin t, R\cos t)$

Farten: $v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2} = \sqrt{R^2} = R$

Akselerasjon: $\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = (-R\cos t, -R\sin t)$

Baneakselerasjon: $a(t) = v'(t) = R' = \underline{\underline{0}}$



Setning (Regneregler for derivasjon):

(i) $(\vec r(t)+\vec s(t))' = \vec r'(t)+\vec s'(t)$

(ii) $(\vec r(t)-\vec s(t))' = \vec r'(t)-\vec s'(t)$

(iii) $(\vec r(t)\cdot\vec s(t))' = \vec r'(t)\cdot\vec s(t)+\vec r(t)\cdot\vec s'(t)$

(iv) $(\vec r(t)\times\vec s(t))' = \vec r'(t)\times\vec s(t)+\vec r(t)\times\vec s'(t)$

(v) $(u(t)\vec r(t))' = u'(t)\vec r(t)+u(t)\vec r'(t)$

Lemma: Hvis $\vec r(t)$ er en deriverbar kurve der $|\vec r(t)|$ er konstant, så $\vec r(t)\perp\vec r'(t)$.

Bevis: La $R=|\vec r(t)|$. Da er $R^2=|\vec r(t)|^2=\vec r(t)\cdot\vec r(t)$. Deriverer på begge sider:

$$0=\vec r'(t)\cdot\vec r(t)+\vec r(t)\cdot\vec r'(t)=2\vec r(t)\cdot\vec r'(t)$$

Altså er $\vec r(t)\cdot\vec r'(t)=0$ og $\vec r(t)\perp\vec r'(t)$.

Tilbake til akselerasjon og baneakselerasjon. Vi vet

$$\vec v(t)=v(t)\vec T(t)$$

$$\boxed{\frac{\vec v(t)}{v(t)}=\vec T(t)}$$

enhetstangentvektor

Deriverer på begge sider:

$$\vec a(t)=v'(t)\vec T(t)+v(t)\underbrace{\vec T'(t)}$$

$$=\underbrace{a(t)\vec T(t)}_{\text{parallell med kurven}}+\underbrace{v(t)\vec N(t)}_{\text{står normalt på kurven.}}$$

$\vec T'(t)$ og står normalt på $\vec T(t)$