# Idag: 12.5 – 12.8 - hurtigvarianten!

**Rekker av funksjoner:** $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{v_n(x)}_{a_n(x-c)^n}$ – for hvilke $x$ konvergerer uttrykket.

**Potensrekker:** $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots + a_n(x-c)^n + \dots$

**Eksempel:** For hvilke $x$ konvergerer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{n}{2^n}}_{a_n}(x-\underbrace{3}_{c})^n \quad ?$$

**Forholdstest:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{n+1}{\cancel{2^{n+1}}}(x-3)^{\cancel{n+1}}\right|}{\left|\frac{n}{\cancel{2^n}}\cancel{(x-3)^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{n+1}{2}(x-3)\right| \cdot \frac{1}{n}}{n \cdot \frac{1}{n}}$$

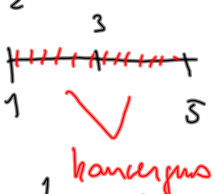
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2}|x-3| = \frac{|x-3|}{2}$$

$\nearrow \frac{|x-3|}{2} < 1$, konvergens

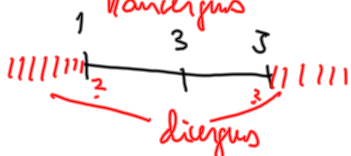
$\searrow \frac{|x-3|}{2} > 1$, divergens

**Det betyr:** $\frac{|x-3|}{2} < 1 \Leftrightarrow |x-3| < 2$

$\underline{1 < x < 5}$




$\frac{|x-3|}{2} > 1 \Leftrightarrow |x-3| > 2$




**Foreløpig konklusjon:** Konvergens for $1 < x < 5$

Divergens for $x < 1$ og $x > 5$

Vet ikke for $x=1$ og $x=5$ (må sees på separat)

**$x=1$:** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}(1-3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\cancel{2^n}}(-1)^n \cdot \cancel{2^n}$ – leddene går ikke mot null, divergens.

**$x=5$:** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}\underbrace{(5-3)^n}_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} n$

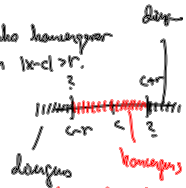
**Konklusjon:** Konvergensintervallet er $\underline{\underline{(1,5)}}$

**Setning:** For en potensrekke $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ har vi tre muligheter:

(i) Rekka konvergerer for alle $x$

(ii) Rekka konvergerer bare for $x = c$

(iii) Det finnes en $r > 0$ slik at rekka konvergerer når $|x-c| < r$ og divergerer når $|x-c| > r$.




Uansett hvilket tilfelle vi er, så er summen

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

en kontinuerlig funksjon i hele konvergensområdet. (Abels teorem)

**Eksempel:** Finn konvergensområdet til $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

**Forholdstesten:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{\cancel{n+1}}}{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot(n+1)}}{\frac{\cancel{|x|^n}}{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1 \quad \text{Konvergens for alle } x.$$

**Bemerkning:** $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

**Kjente potensrekker.**

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

**Idé:**

$$\arctan x = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int (1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots)\,dx$$

$$\overset{?}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

er dette lov?

**Setning:** Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ er en potensrekke med konvergensradius $r > 0$ (vi kan godt ha $r = \infty$).

La

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

(i) Da er

$$s'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}$$

i det indre av konvergensintervallet (den deriverte rekken har samme konvergensradius som den opprinnelig, men vi kan miste konvergens i endepunkter).

(ii) Da er

$$\int_c^x s(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-c)^{n+1}$$

i hele konvergensområdet (den integrerte rekken har samme konvergensradius som den opprinnelig, men vi kan tjene konvergens i endepunktene.)

**Eksempel:** Vet at

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad |x| < 1$$

Integrerer på begge sider:

$$\arctan x = \left[\arctan t\right]_0^x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Altså

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad I = [-1, 1]$$

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

Leibniz' formel for $\pi$: $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ (Kerala-skolen)

# Kunsten å summere en rekke

**Eksempel:** Avgjør hvor rekken

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1}$$

konvergerer og finn summen!

**Forholdstesten:** $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)-1}}{\frac{x^n}{n-1}} \right|$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|}{n}}{\frac{1}{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{|x|}{n} \cdot \frac{n-1}{1} = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)|x| = |x|$$

Konvergens for $|x|<1$, $-1<x<1$

Divergens for $|x|>1$, $x<-1$ og $x>1$.

**Tester endepunkter:**

$x=1$: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ divergerer $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

$x=-1$: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-1}$ konvergerer (alternerende rekke der leddene avtar mot null)

**Konvergensintervall:** $[-1,1)$

Må finne $s(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n-1}$, $x \in [-1,1)$

dumt at den står der!

Deler på $x$:

$$\frac{s(x)}{x} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1}$$

**Deriverer:**

$$\left(\frac{s(x)}{x}\right)' = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cancel{(n-1)}x^{n-2}}{\cancel{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} = 1+x+x^2+\dots = \frac{1}{1-x}$$

**Vet:**

$$\left(\frac{s(x)}{x}\right)' = \frac{1}{1-x}$$

**Integrerer:**

$$\frac{s(x)}{x} = -\ln|1-x| + C, \quad C = 0$$

**Bestemmer C:**

$$\frac{s(x)}{x} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$\left[\frac{s(x)}{x}\right]_{x=0} = 0$$

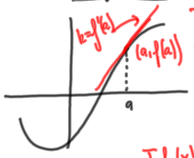
$$-\ln|1-0| + C = C$$

Ganger med $x$:

$$\boxed{s(x) = -x\ln|1-x|}$$

Hurra.

## Taylorrekker (12.8)




Tangenten i a er den rette linjen som gir den beste tilpasningen til f rundt punktet a.

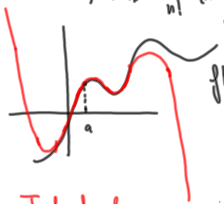
$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

$$T_1 f(x) = y = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}_{\text{førstegradspolynomet som passer best til } f \text{ rundt punktet } a.}$$

Hvilket n-te gradspolynom passer best til f i nærheten av a?

Taylorpolynom av n-te grad:

$$T_n f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$




Restledd:

$$f(x) - T_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

c ligger mellom x og a.

**Taylors formel:**

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{restledd}}$$

Hvis restleddet går mot null når $n \to \infty$, så får vi

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{\text{potensrekke}} \longleftarrow \text{Taylorrekken til } f$$

**Definisjon:** Taylorrekken til funksjonen f i punktet a er

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

(ADVARSEL: Det kan hende at Taylorrekken konvergerer, men at summen ikke er lik $f(x)$ (men som regel er de like).

**Eksempel:** $f(x) = e^x$, $a = 0$

$f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, $f'''(x) = e^x, \dots, f^{(n)}(x) = e^x$

Taylorrekken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overset{1}{e^0}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Restleddet i Taylors formel går mot null, og vi får

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{for alle } x$$

**Tilsvarende:**

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \text{for alle } x$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad \text{for alle } x$$

**Triks:** Vet

$$e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \quad \text{for alle } u.$$

Velger $u = -x^2$:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} \Big\} \text{Taylorrekken til } e^{-x^2}.$$

**Setning:** Dersom

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

i et område rundt c, så er

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

Taylorrekken til f, dvs $a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$