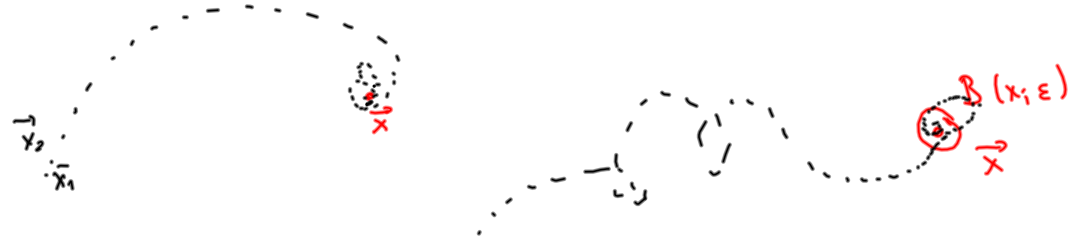
Følger i $\mathbb{R}^m$ (kap. 5)

En følge $\{\vec{x}_n\}$ i $\mathbb{R}^m$ er en sekvens

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \dots$$

av vektorer i $\mathbb{R}^m$.

<u>Definisjon</u>: Følgen $\{\vec{x}_n\}$ <u>konvergerer</u> mot $\vec{x}$ dersom det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at $|\vec{x}_n - \vec{x}| < \varepsilon$ for alle $n \geq N$. Vi skriver $\lim_{n \to \infty} \vec{x}_n = \vec{x}$ eller $\vec{x}_n \to \vec{x}$.



<u>Setning</u>: Anta at $\{\vec{x}_n\}$ er en følge i $\mathbb{R}^m$ med koordinatene

$$\vec{x}_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(m)})$$

og la

$$\vec{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)})$$

Da vil $\vec{x}_n \to \vec{x}$ hvis og bare hvis $x_n^{(i)} \to x^{(i)}$ for alle $i = 1, 2, \dots, m$.

<u>Setning</u>: Hvis $\{\vec{x}_n\}, \{\vec{y}_n\}$ er to følger i $\mathbb{R}^m$ som konvergerer mot hhv. $\vec{x}$ og $\vec{y}$, så

(i) $\vec{x}_n + \vec{y}_n \to \vec{x} + \vec{y}$

(ii) $\vec{x}_n - \vec{y}_n \to \vec{x} - \vec{y}$

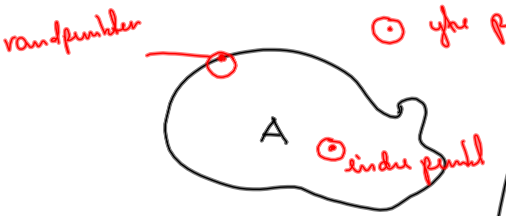
(iii) $\vec{x}_n \cdot \vec{y}_n \to \vec{x} \cdot \vec{y}$

Åpne og lukkede mengder

I $\mathbb{R}$ jobbet vi med: Åpne intervaller: (a,b)

lukkede —"— : $[a,b]$

La oss se på en mengde $A \subset \mathbb{R}^m$:

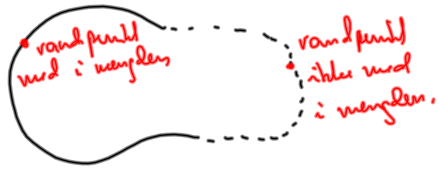


Definisjon: (i) $\vec{a}$ er et indre punkt for A dersom det finnes en $r>0$ slik at $B(\vec{a},r)$ ligger inni A.

(ii) $\vec{a}$ er et ytre punkt for A dersom det finnes en kule $B(\vec{a},r)$ om $\vec{a}$ der ingen av punktene er med i A.

(iii) $\vec{a}$ er et randpunkt for A dersom enhver kule $B(\vec{a},r)$ om $\vec{a}$ inneholder både punkter som er med i A og punkter som ikke er med i A.

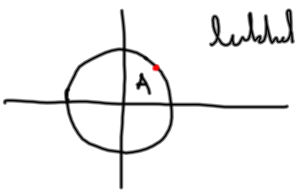
Typisk vil noen randpunkter være med i A og andre ikke:



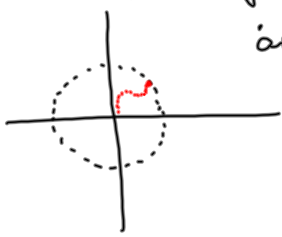
Definisjon: Dersom alle randpunktene til A er med i A, så kalles A en lukket mengde, og hvis ingen av randpunktene er med, kalles A en åpen mengde.

Eksempel:

$A = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$ lukket

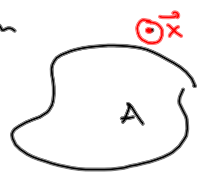


$A = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$ åpen



Setning: Anta at $\{\vec{x}_n\}$ er en følge fra en lukket delmengde A av $\mathbb{R}^m$ og $\vec{x}_n \to \vec{x}$. Da vil $\vec{x} \in A$.

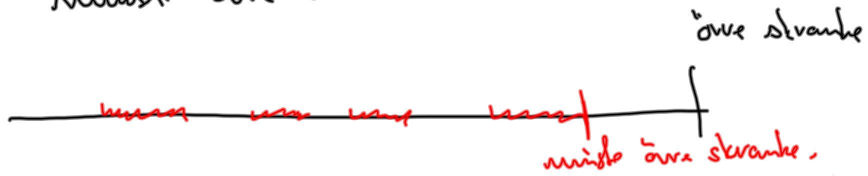
Bevisskisse: Anta for motsigelse at $\vec{x} \notin A$. Siden A er lukket, så må $\vec{x}$ være et ytre punkt: Vi kan dermed finne en kule $B(\vec{x},\varepsilon)$ om $\vec{x}$ som ikke inneholder noen punkter fra A. Dermed er $x_n \notin B(\vec{x},\varepsilon)$, dvs $|\vec{x}_n - \vec{x}| \geq \varepsilon$ for alle n. Dette betyr at $\vec{x}_n \not\to x$, selvmotsigelse.



Setning: Dersom $\vec{F}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ er kontinuerlig i $\vec{x}$ og $\vec{x}_n \to \vec{x}$, så er $\vec{F}(\vec{x}_n) \to \vec{F}(\vec{x})$.

Kompletthet av $\mathbb{R}^m$ (kap 5.2)

Kompletthet av $\mathbb{R}$: Enhver ikke-tom, begrenset delmengde av $\mathbb{R}$ har en minste øvre skranke.



Skal finne en formulering for $\mathbb{R}^m$ som bruker følger istedenfor mengder (og som ser ganske annerledes ut).

Delfølge: Hvis vi har en følge i $\mathbb{R}^m$:

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4, \vec{x}_5, \vec{x}_6, \vec{x}_7, \vec{x}_8, \vec{x}_9, \vec{x}_{10}, \vec{x}_{11}, \ldots$$

og plukker ut uendelig mange elementer

$$\vec{x}_3, \vec{x}_5, \vec{x}_6, \vec{x}_9, \vec{x}_{11}, \ldots$$

så har vi en delfølge.

Hvis elementene vi plukker ut har nummer

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_i < \ldots,$$

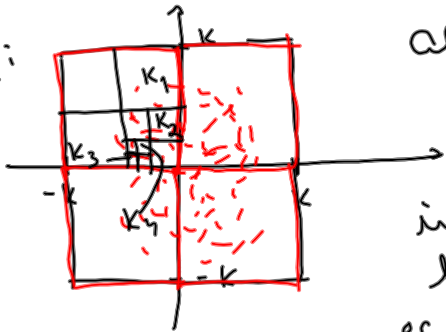
så er delfølgen vår

$$\vec{x}_{n_1}, \vec{x}_{n_2}, \vec{x}_{n_3}, \ldots, \vec{x}_{n_i}, \ldots$$

så vi skriver følgen $\{\vec{x}_{n_i}\}$

Bolzano-Weierstrass' teorem: Enhver begrenset følge i $\mathbb{R}^m$ har en konvergent delfølge (begrenset: Det finnes et tall K slik at $|x_n| < K$ for alle n).

Bevis (for $\mathbb{R}^2$):



Alle elementene ligger inni denne boksen

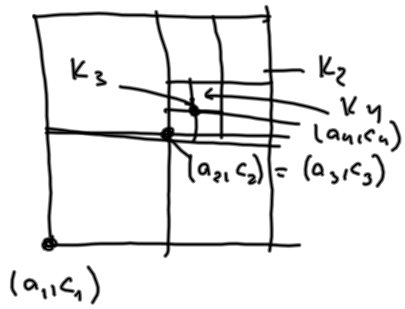
Minst én av delboksene inneholder uendelig mange ledd, kall den K_1. Del i 4 og en mindre boks med uendelig mange ledd, K_2.

Vi får en sekvens av stadig mindre bokser som alle inneholder uendelig mange ledd $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset K_4 \supset \ldots\ldots$

La $K_1 = [a_1, b_1] \times [c_1, d_1]$, $K_2 = [a_2, b_2] \times [c_2, d_2], \ldots$

Nederste venstre hjørne (a_n, c_n).

Følgene $\{a_n\}$, $\{c_n\}$ er voksende og begrensede, og nærmer seg derfor grenseverdier a og c. Vi skal finne en delfølge av $\{x_n\}$ som konvergerer mot (a, c).



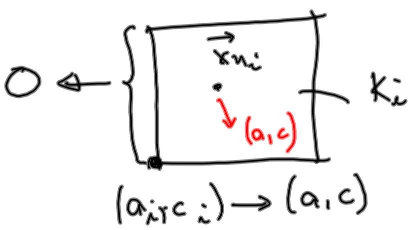
La x_{n_1} være det første elementet i følgen som ligger i K_1

La x_{n_2} —— " —— etter x_{n_1} som ligger i K_2

La x_{n_3} —— " —— etter x_{n_2} —— " —— i K_3

$\vdots$

Dermed har vi en delfølge $\{\vec{x}_{n_i}\}$ der $x_{n_i} \in K_i$



Siden sidekant på boksene går mot null, viser dette at delfølgen $\vec{x}_{n_i} \to (a, c)$.

<u>Definisjon</u>: En følge $\{\vec{x}_n\}$ i $\mathbb{R}^m$ kalles en <u>Cauchy-følge</u> dersom det til enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at

$$|x_n - x_k| < \varepsilon \text{ for alle } n,k \geq N.$$

<u>Setning</u>: Alle konvergente følger er Cauchy-følger.

<u>Bevis</u>: Siden $\{\vec{x}_n\}$ konvergerer finnes det for en gitt $\varepsilon > 0$ en $N \in \mathbb{N}$ slik at for $n \geq N$, så er $|\vec{x}_n - \vec{x}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Hvis $n,k \geq N$, så er da

$$|\vec{x}_n - \vec{x}_k| \leq |(\vec{x}_n - \vec{x}) + (\vec{x} - \vec{x}_k)| \leq \underbrace{|\vec{x}_n - \vec{x}|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|\vec{x} - \vec{x}_k|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.$$

<u>Teorem</u> (Kompletthet av $\mathbb{R}^m$) En følge $\{\vec{x}_n\}$ i $\mathbb{R}^m$ konvergerer hvis og bare hvis den er en Cauchy-følge.

<u>Bevisskisse</u>: Det gjenstår å vise at enhver Cauchy-følge $\{\vec{x}_n\}$ konvergerer.

Siden $\{\vec{x}_n\}$ er en Cauchy-følge, er den begrenset og har dermed en delfølge $\{\vec{x}_{n_i}\}$ som konvergerer til et punkt $\vec{x}$. Vi skal vise at da vil den opprinnelige følgen også konvergere mot $\vec{x}$. Gitt $\varepsilon > 0$, må vi vise at det finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at $|\vec{x} - \vec{x}_n| < \varepsilon$ når $n \geq N$. Siden $\{\vec{x}_n\}$ er Cauchy, finnes det en $N \in \mathbb{N}$ slik at $|\vec{x}_n - \vec{x}_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ når $n,k \geq N$. Siden delfølgen $\vec{x}_{n_i} \to \vec{x}$, finnes det en $n_i \geq N$ slik at $|\vec{x}_{n_i} - \vec{x}| < \frac{\varepsilon}{2}$. Hvis $n \geq N$, så er

$$|\vec{x} - \vec{x}_n| \leq |(\vec{x} - \vec{x}_{n_i}) + (\vec{x}_{n_i} - \vec{x}_n)| \leq \underbrace{|\vec{x} - \vec{x}_{n_i}|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|\vec{x}_{n_i} - \vec{x}_n|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon.$$

<u>Hvorfor er dette nyttig?</u> Fordi det ofte er lettere å vise at en følge er Cauchy enn at den konvergerer.