Kjerneregelen for parametriserte kurver (seksjon 3.2)

Vi har: (i) en parametrisert kurve $\vec{r}: I \to \mathbb{R}^n$, deriverbar.

(ii) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ en deriverbar funksjon

Vi ser på

$$g(t) = f(\vec{r}(t))$$

Hva er $g'(t)$?

Eksempel: $\vec{r}(t)$ posisjonen til et fly ved tiden t.

$f(x,y,z)$ = temperaturen i punktet x,y,z

$g(t) = f(\vec{r}(t))$ temperaturen ved flyet ved tiden t.

$g'(t)$ temperaturendringen for flyet ved tiden t.

Vi har $g(t) = f(\vec{r}(t)) = f(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$.

Ifølge kjerneregel

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{r}(t))\, x_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{r}(t))\, x_2'(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{r}(t))\, x_n'(t)$$

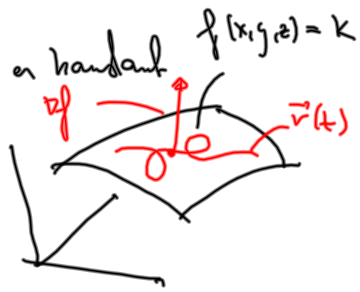
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{r}(t)), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{r}(t)), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{r}(t))\right) \cdot (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t))$$

$$= \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)$$

Kjerneregelen for parametriserte kurver: Hvis $\vec{r}: I \to \mathbb{R}^n$ er deriverbar og $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ også er deriverbar, så er den deriverte til den sammensatte funksjonen $g(t) = f(\vec{r}(t))$ gitt ved

$$g'(t) = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)$$

Anta at kurven $\vec{r}(t)$ følger en flate hvor f er konstant



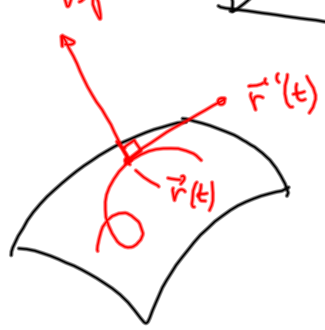
Dette gir

$$K = f(\vec{r}(t))$$

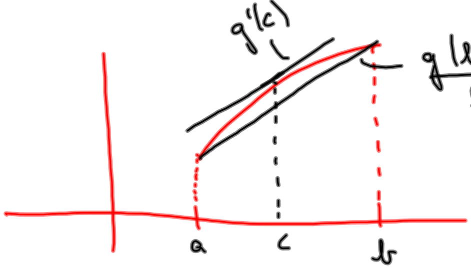
Deriverer m.h.p. t på begge sider:

$$0 = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)$$

Altså $\nabla f(\vec{r}(t)) \perp \vec{r}\,'(t)$



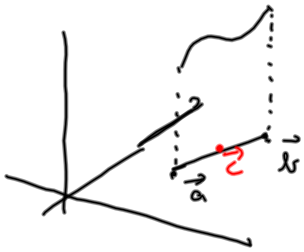
Minner om middelverdisetningen



$$\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(c) \Rightarrow g(b)-g(a) = g'(c)(b-a)$$

Middelverdisetningen for funksjoner av flere variable: Anta at $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er deriverbar og at $\vec{a}, \vec{b}$ er to forskjellige punkter i $\mathbb{R}^n$. Da finnes det et punkt $\vec{c}$ på linjestykket mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ slik at

$$f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{c}) \cdot (\vec{b}-\vec{a})$$



Bevis: Linjestykket fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ er parametrisert ved

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + t(\vec{b}-\vec{a}) \qquad t \in [0,1]$$

$$\vec{r}\,'(t) = \vec{b} - \vec{a}$$

Se på $g(t) = f(\vec{r}(t))$ $\quad t \in [0,1]$

Vet at det finnes en $c \in (0,1)$ slik at: $\dfrac{\overset{f(\vec{b})}{\overset{\parallel}{g(1)}} - \overset{f(\vec{a})}{\overset{\parallel}{g(0)}}}{\underbrace{1-0}_{1}} = g'(c)$ dvs

$$f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = g'(c)$$

Ved kjerneregelen er

$$g'(t) = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t) = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot (\vec{b}-\vec{a})$$

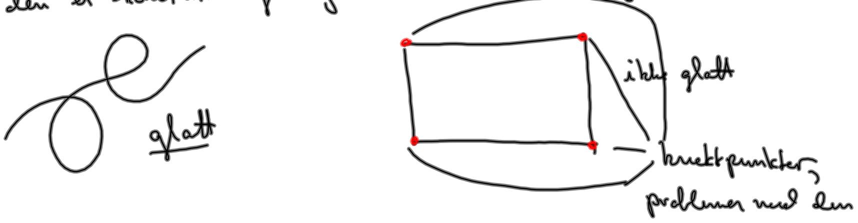
Dermed

$$f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\underbrace{\vec{r}(c)}_{\vec{c}\ \text{et punkt på linjestykket fra}\ \vec{a}\ \text{til}\ \vec{b}}) \cdot (\vec{b}-\vec{a})$$

Altså $\quad f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{c}) \cdot (\vec{b}-\vec{a})$ $\qquad$ HURRA!

Linjeintegraler av skalarfelt (3.3)

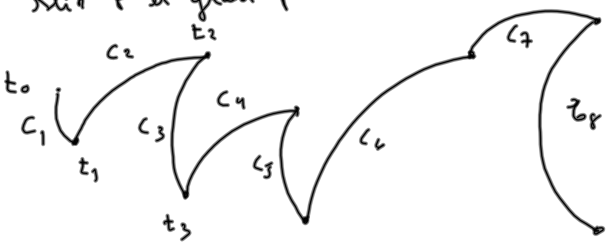
En parametrisert kurve $\vec{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ kalles glatt dersom den er kontinuerlig og at $\vec{r}\,'$ er definert og kontinuerlig i (a,b)



Definisjon: En parametrisert kurve $\vec{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ kalles stykkevis glatt dersom det finnes en partisjon

$$a=t_0<t_1<t_2<\dots<t_n=b$$

slik at $\vec{r}$ er glatt på hvert av delintervallene $[t_{i-1},t_i]$

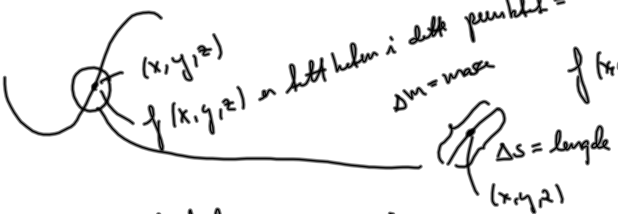


$\vec{V}(t)$ og $v(t)$ eksisterer og er kontinuerlige unntatt i "skjøtepunktene".

Motivasjon

kurve med varierende tetthet

tetthet = masse/lengdeenhet.

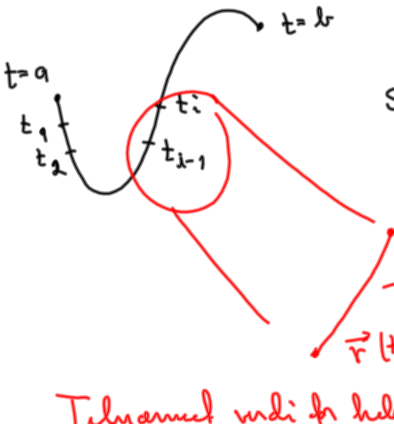


$$f(x,y,z)\approx\frac{\Delta m}{\Delta s}$$

Hva er den totale massen når $f(x,y,z)$ varierer langs kurven?

Parametriserer kurven: $\vec{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$

$$a=t_0<t_1<t_2<\dots<t_n=b$$



Massen til det i-te delintervallet:

$$s(t)=\int_a^t v(s)\,ds \quad \text{der } v(s)=\sqrt{x_1'(s)^2+\dots+x_n'(s)^2}$$

$$s'(t)=v(t)$$

$$\Delta s_i=s(t_i)-s(t_{i-1})\approx v(t_i)(t_i-t_{i-1})$$

$$m_i\approx f(\vec{r}(t_i))\,\Delta s_i\approx f(\vec{r}(t_i))\,v(t_i)(t_i-t_{i-1})$$

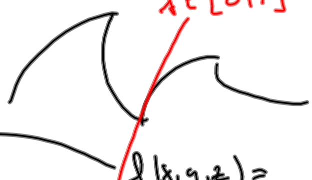
Tilnærmet verdi for hele massen:

$$M=\sum_{i=1}^n m_i\approx\underbrace{\sum_{i=1}^n f(\vec{r}(t_i))\,v(t_i)(t_i-t_{i-1})}\longrightarrow\int_a^b f(\vec{r}(t))\,v(t)$$

Definisjon: Anta at kurven $\mathcal{C}$ er parametrisert av den stykkevis glatte funksjonen $\vec{r}:[a,b]\to\mathbb{R}^n$. Anta videre at f er en kontinuerlig funksjon av n variable som er definert på kurven $\mathcal{C}$. Da definerer vi kurveintegralet $\int_{\mathcal{C}} f\,ds$ ved

$$\int_{\mathcal{C}} f\,ds = \int_a^b f(\vec{r}(t))\,v(t)\,dt$$

forutsatt at integralet til høyre eksisterer som et ekte eller uekte integral.



$t\in[0,1]$

Eksempel: Regn ut $\int_{\mathcal{C}} (x^2z+y^2z)\,ds$

når $\mathcal{C}$ er parametrisert ved

$$\vec{r}(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+t\,\vec{k}=(\cos t,\sin t,t)$$

$f(x,y,z)=x^2z+y^2z$

Ser at

$$f(\vec{r}(t))=f(\cos t,\sin t,t)=\cos^2 t\cdot t+\sin^2 t\cdot t=t(\cos^2 t+\sin^2 t)=t$$

$$\vec{v}(t)=\vec{r}\,'(t)=-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+\vec{k}$$

$$v(t)=|\vec{v}(t)|=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+1^2}=\sqrt{2}$$

Dermed:

$$\int_{\mathcal{C}} f\,ds=\int_0^1 f(\vec{r}(t))\,v(t)\,dt=\int_0^1 t\sqrt{2}\,dt=\left[\sqrt{2}\,\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

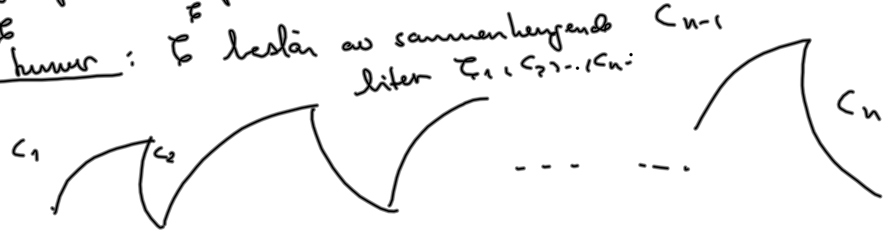
Regneregler for linjeintegraler:

(i) $\int_{\mathcal{C}}(f+g)\,ds=\int_{\mathcal{C}} f\,ds+\int_{\mathcal{C}} g\,ds$

(ii) $\int_{\mathcal{C}}(f-g)\,ds=\int_{\mathcal{C}} f\,ds-\int_{\mathcal{C}} g\,ds$

(iii) $\int_{\mathcal{C}} af\,ds=a\int_{\mathcal{C}} f\,ds$ $\quad a$ konstant.

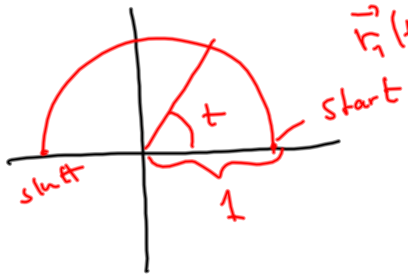
Oppdele kurver: $\mathcal{C}$ består av sammenhengende kurver $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_n$:



$$\int_C f\,ds=\int_{\mathcal{C}_1} f\,ds+\int_{\mathcal{C}_2} f\,ds+\dots+\int_{\mathcal{C}_n} f\,ds$$

Kurver kan parametriseres på ulike vis

$\vec{r}_1(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$



$r_2(t) = t\vec{i} + \sqrt{1-t^2}\,\vec{j}$, $t = [-1, 1]$

$\int_C f\,ds$ – parametriseringen r_1

$\int_C f\,ds$ – parametriseringen r_2