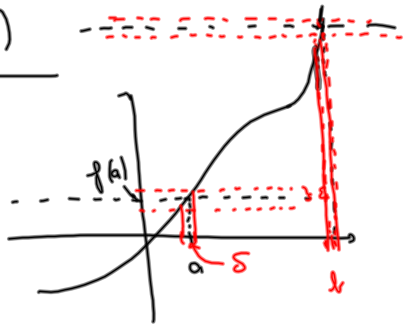
Uniform kontinuitet (5.3)



Tvenger forskjellig δ til å matche samme ε avhengig av hvor bratt grafen er.

Kontinuitet: Hvis $A \subset \mathbb{R}^m$ og $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^k$, så sier vi at $\vec{F}$ er uniformt kontinuerlig i A dersom det til enhver $\varepsilon > 0$, finnes en $\delta > 0$ slik at for alle $\vec{x}, \vec{y} \in A$ med $|\vec{x}-\vec{y}| < \delta$, så er $|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})| < \varepsilon$.

Teorem: Hvis A er lukket og begrenset, og $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^k$ er kontinuerlig, så er $\vec{F}$ uniformt kontinuerlig i A.

Bevis: Anta (for motsigelse) at det finnes en funksjon $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^k$ som er kontinuerlig, men ikke uniformt kontinuerlig. Siden $\vec{F}$ ikke er uniformt kontinuerlig, så finnes det en $\varepsilon > 0$ slik at for alle $\delta > 0$ finnes det $\vec{x}, \vec{y} \in A$ slik at $|\vec{x}-\vec{y}| < \delta$, men $|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})| \geq \varepsilon$. For $\delta = \frac{1}{n}$ finnes det altså punkter $\vec{x}_n, \vec{y}_n \in A$ slik at $|\vec{x}_n - \vec{y}_n| < \frac{1}{n}$, men $|\vec{F}(\vec{x}_n) - \vec{F}(\vec{y}_n)| \geq \varepsilon$. Siden A er begrenset, må $\{\vec{x}_n\}$ ha en konvergent delfølge $\{\vec{x}_{n_i}\}$ (Bolzano-Weierstrass), og siden A er lukket, må grensen $\vec{x}$ ligge i A. Siden $|\vec{x}_{n_i} - \vec{y}_{n_i}| < \frac{1}{n_i} \to 0$, må også $\{\vec{y}_{n_i}\}$ gå mot $\vec{x}$. Da må

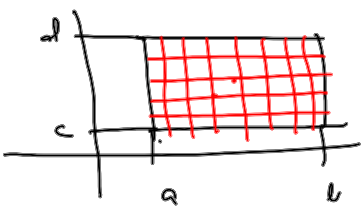
$$\vec{F}(\underset{\downarrow\,\vec{x}}{\vec{x}_{n_i}}) \to \vec{F}(\vec{x}) \quad \text{siden } \vec{F} \text{ er kont.}$$

$$\vec{F}(\underset{\downarrow\,\vec{x}}{\vec{y}_{n_i}}) \to \vec{F}(\vec{x}) \quad \text{siden } \vec{F} \text{ er kont.}$$

Siden $|\vec{F}(\vec{x}_{n_i}) - \vec{F}(\vec{y}_{n_i})| \geq \varepsilon$, er dette umulig.

Altså kan det ikke finnes noen funksjon på A som er kontinuerlig, men ikke uniformt kontinuerlig.

Kap 6: Kont. funksjoner er alltid integrerbare over $R = [a,b] \times [c,d]$

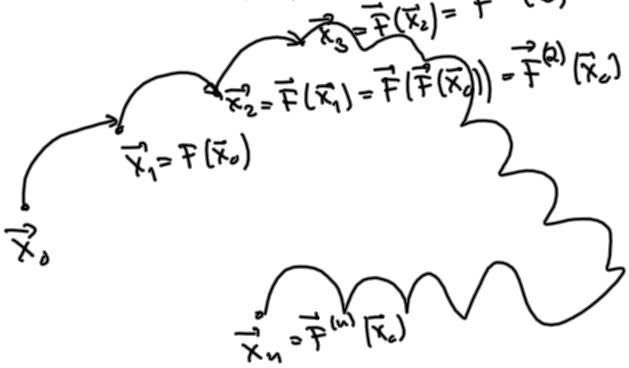


$\varepsilon > 0$

$\delta > 0$

Iterasjon av funksjoner (5.4)

$\vec{F}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ $\qquad \vec{x}_0,\ \vec{x}_1 = \vec{F}(\vec{x}_0)$



Kap 4.11: $\vec{F}$ var lineær.

Eksempel: Byttedyr: Etter n år: x_n $\qquad x_1 = 500$

Rovdyr: — " —: y_n $\qquad y_1 = 100$

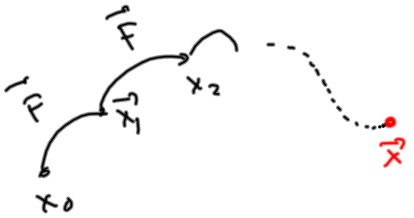
$$x_{n+1} = 1.2\,x_n\left(1 - \frac{x_n}{10\,000}\right) - 0.001\,x_n y_n$$

$$y_{n+1} = 0.93\,y_n + 0.0005\,x_{n-1}\,y_{n-1}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}}_{\vec{x}_{n+1}} = \vec{F}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}}_{\vec{x}_n}\right) \qquad \vec{x}_{n+1} = \vec{F}(\vec{x}_n)$$

Definisjon: Dersom $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{x}$, så kalles $\vec{x}$ et fikspunkt for $\vec{F}$.

Observasjon: Dersom $\vec{F}$ er kontinuerlig og $\vec{F}^{(n)}(\vec{x}_0) \to \vec{x}$, så vil $\vec{x}$ være et fikspunkt.

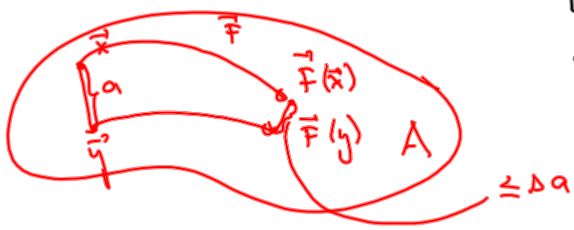


Bevis:
$$\begin{array}{ccc} \vec{x}_{n+1} & = & \vec{F}(\vec{x}_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \vec{x} & = & \vec{F}(\vec{x}) \end{array}$$

Banachs fikspunktteorem

En funksjon $\vec{F}: A \to A$ kalles en kontraksjon dersom det finnes et tall s, $0 \le s < 1$, slik at

$$|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})| \le s|\vec{x} - \vec{y}|$$



Legg merke til at

$$|F^{(2)}(\vec{x}) - F^{(2)}(\vec{y})|$$

$$= |\vec{F}(\vec{F}(\vec{x})) - \vec{F}(\vec{F}(\vec{y}))|$$

$$\le s \underbrace{|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})|}$$

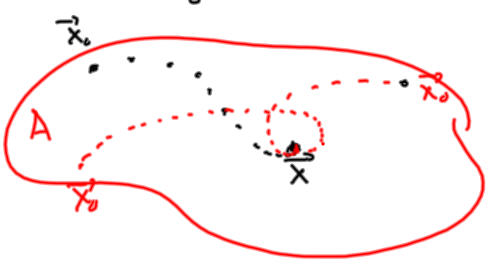
$$\le s \; s|\vec{x} - \vec{y}| = s^2 |\vec{x} - \vec{y}|$$

Generell: $|F^{(n)}(\vec{x}) - \vec{F}^{(n)}(\vec{y})| \le s^n |\vec{x} - \vec{y}|$

Banachs fikspunktteorem: Anta at $A \subset \mathbb{R}^m$ er en lukket, begrenset mengde og at $\vec{F}: A \to A$ er en kontraksjon. Da har $\vec{F}$ et entydig fikspunkt $\vec{x}$, og uansett startpunkt $\vec{x}_0 \in A$, så vil iterasjonen

$$\vec{x}_0, \; \vec{x}_1 = F(\vec{x}_0), \; \vec{x}_2 = \vec{F}(\vec{x}_1) = \vec{F}^{(2)}(x_0), \; \ldots, \; \vec{x}_n = \vec{F}(\vec{x}_{n-1}) = \vec{F}^{(n)}(\vec{x}_0), \ldots$$

konvergere mot $\vec{x}$.



Bevis: La oss først vise at det ikke kan være mer enn ett fikspunkt: Anta at $\vec{x}$ og $\vec{y}$ er fikspunkter:

$$|\vec{x}-\vec{y}| = |\vec{F}(x)-\vec{F}(y)| \le s|\vec{x}-\vec{y}|$$

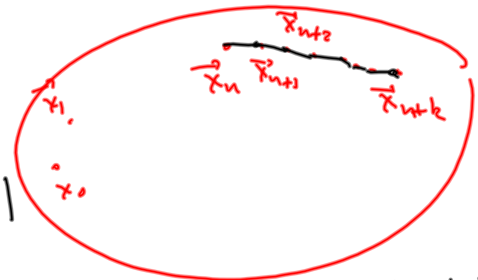
dvs

$$|\vec{x}-\vec{y}| \le \overset{<1}{s}\,|\vec{x}-\vec{y}| \Rightarrow |\vec{x}-\vec{y}|=0 \Rightarrow \vec{x}=\vec{y}.$$

La oss vise at vi har et fikspunkt: Velg et startpunkt $\vec{x}_0 \in A$,

$$\vec{x}_0,\ \vec{x}_1=F(\vec{x}_0),\ \vec{x}_2=\vec{F}(\vec{x}_1)=\vec{F}^{(2)}(\vec{x}_0),\ \dots,\ \vec{x}_n=\vec{F}(\vec{x}_{n-1})=\vec{F}^{(n)}(\vec{x}_0),\dots$$

Vi skal vise at $\{\vec{x}_n\}$ er en Cauchy-følge og dermed konvergent.



$$|\vec{x}_n-\vec{x}_{n+k}|$$

$$\le |\vec{x}_n-\vec{x}_{n+1}|+|\vec{x}_{n+1}-\vec{x}_{n+2}|+\dots+|\vec{x}_{n+k-1}-\vec{x}_n|$$

$$= |\vec{F}^{(n)}(\vec{x}_0)-\vec{F}^{(n)}(\vec{x}_1)|+|\vec{F}^{(n+1)}(\vec{x}_0)-\vec{F}^{(n+1)}(\vec{x}_1)|+\dots+|\vec{F}^{(n+k-1)}(\vec{x}_0)-\vec{F}^{(n+k-1)}(\vec{x}_1)|$$

$$= s^n|\vec{x}_0-\vec{x}_1|+s^{n+1}|\vec{x}_0-\vec{x}_1|+\dots+s^{n+k-1}|\vec{x}_0-\vec{x}_1|$$

$$\le |\vec{x}_0-\vec{x}_1|\underbrace{(s^n+s^{n+1}+\dots+s^{n+k-1}+s^{n+k}+\dots)}_{\text{geometrisk rekke med kvotient } s \quad \frac{s^n}{1-s}} \le \underbrace{|\vec{x}_0-\vec{x}_1|\frac{s^n}{1-s}}_{\text{kan få liten ved å velge } n \text{ stor nok}}$$

Dette betyr at $\{\vec{x}_n\}$ er en Cauchy-følge og følgelig konvergerer mot et punkt $\vec{x} \in A$.

Siden $\vec{x}_n \to \vec{x}$, må (ifølge observasjonen) $\vec{x}$ være et fikspunkt.

HURRA!