MAT1110 Repetisjon

Derivasjon med mer

$\vec{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, Jacobi-matrisen

$$\vec{F}'(\vec{x})=\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \frac{\partial F_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

Kjerneregelen: $\vec{H}(\vec{x})=\vec{F}(\vec{G}(\vec{x}))$, $\vec{H}'(\vec{x})=\underbrace{\vec{F}'(\vec{G}(\vec{x}))\cdot\vec{G}'(\vec{x})}_{\text{matriser}}$

Komponentform: $f(u_1,\dots,u_m)$, $g_1(\vec{x}),\dots,g_m(\vec{x})$

$h(\vec{x})=f(g_1(\vec{x}),\dots,g_m(\vec{x}))$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_i}+\frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial g_2}{\partial x_i}+\dots+\frac{\partial f}{\partial u_m}\frac{\partial g_m}{\partial x_i}$$

Linearisering: $T_{\vec{a}}\vec{F}(\vec{x})=\vec{F}(\vec{a})+\vec{F}'(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a})$ ← den affinavbildning som tilnærmer $\vec{F}$ best rundt $\vec{a}$.

Newtons metode: $\vec{x}_{n+1}=\vec{x}_n-\vec{F}'(\vec{x}_n)^{-1}\vec{F}(\vec{x}_n)$

Maks- og minproblemer uten bibetingelser:

Stasjonært punkt: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})=0$ for alle $i=1,\dots,n$. → sadelpunkter / lokale maks / lokale min.

Annenderiverttesten:

Generelt: **Hessematrisen:**

$$Hf=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{pmatrix}$$

Hvis:
- alle egenverdiene har samme fortegn
  - lok maks hvis $\lambda_i<0$
  - lok min hvis $\lambda_i>0$
- egenverdier med ulikt fortegn, gå sadelpunkt.

Spesielt for funksjoner av to variable:

$$D=\begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}$$

(i) $D<0\Rightarrow$ sadelpunkt

(ii) $D>0\Rightarrow$
- lokal maks hvis $A<0$ (el $C<0$)
- lokal min hvis $A>0$ (el $C>0$)

Maks/min med bibetingelser:

Finn maks/min til $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ under bibetingelsene

$$g_1(x_1,\dots,x_n)=b_1,\quad\dots,\quad g_k(x_1,\dots,x_n)=b_k$$

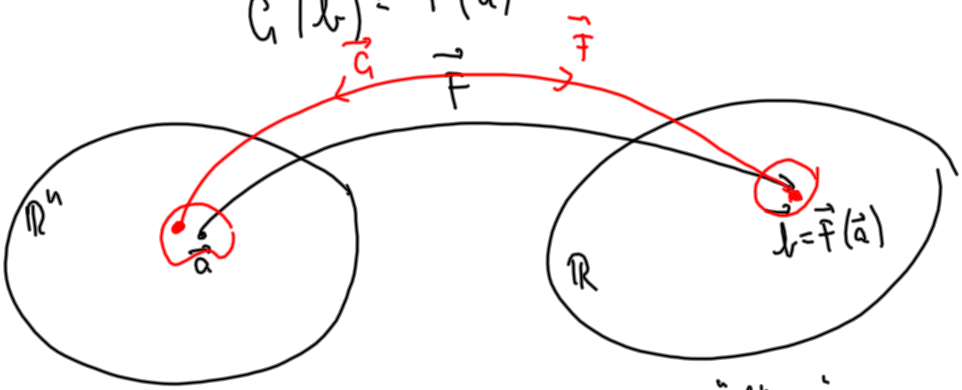
Lagrange multiplikatormetode: Let etter punkter der

$$\left.\begin{aligned}\nabla f(\vec{x})&=\lambda_1\nabla g_1(\vec{x})+\dots+\lambda_k\nabla g_k(\vec{x})\\ g_1(\vec{x})&=b_1\\ &\vdots\\ g_k(\vec{x})&=b_k\end{aligned}\right\}\begin{array}{l}n+k\text{ ukjente}\\ n+k\text{ ligninger.}\end{array}$$

Omvendte funksjoner: $\vec F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Dersom

$\vec F'(\vec a)$ er inverterbar, så finnes det en (lokal) omvendt funksjon $\vec G$ definert i et område rundt $\vec b = \vec F(\vec a)$, og

$$\vec G'(\vec b) = \vec F'(a)^{-1}$$



"løser"

Implisitte funksjoner: $f(\vec x, y) = 0 \Rightarrow y = g(\vec x)$

Anta at $f(\vec a, b) = 0$ og at $\frac{\partial f}{\partial y}(\vec a, b) \neq 0$, så finnes det en funksjon g definert på en omegn av $\vec a$ slik at $g(\vec a) = b$ og $f(\vec x, g(\vec x)) = 0$. De deriverte til g er gitt ved

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Begrunnelse: Deriver $f(\vec x, g(\vec x)) = 0$ m.h.p. x_i:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$$

Integrasjon

Integraler:

Linjeintegraler

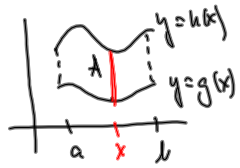
- skalarfelt: $\int_C f\,ds = \int_a^b f(\vec{r}(t))\,v(t)\,dt$, $\quad v(t)=|\vec{r}\,'(t)|$
- vektorfelt: $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$

Flateintegraler

- skalarfelt: $\int_S f\,dS = \iint_A f(\vec{r}(u,v))\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right|du\,dv$
- ~~vektorfelt~~

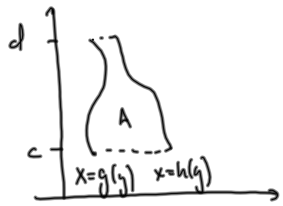
Dobbeltintegraler; Områder av type I:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b\left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\right]dx$$

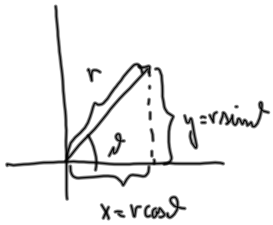


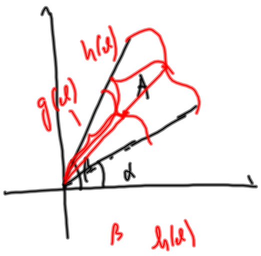
Områder av type II

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d\left[\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx\right]dy$$



Polarkoordinater:





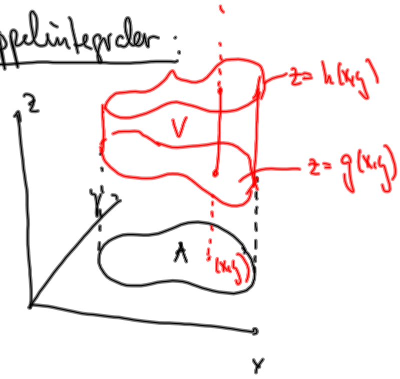
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta\left[\int_{g(\theta)}^{h(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\right]d\theta$$

Jacobi-faktor

Tekna-kræsjkurs i
MAT1110
Fredag 8. juni kl 9-14
Pizza og brus i pausen!

(kun for Tekna-medlemmer)

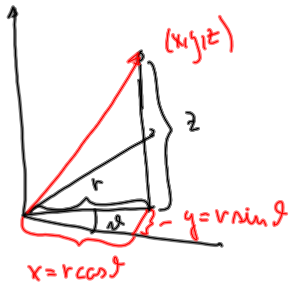
Trippelintegraler:



$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iint_A \left[\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dx\,dy$$

Sylinderkoordinater:

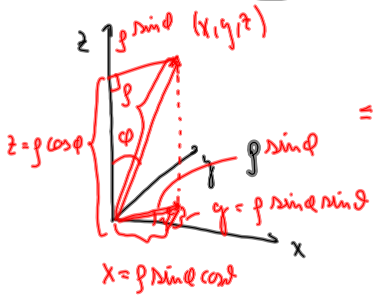


$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_{"V"} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz$$

V beskrevet i sylinderkoordinater

Kulekoordinater



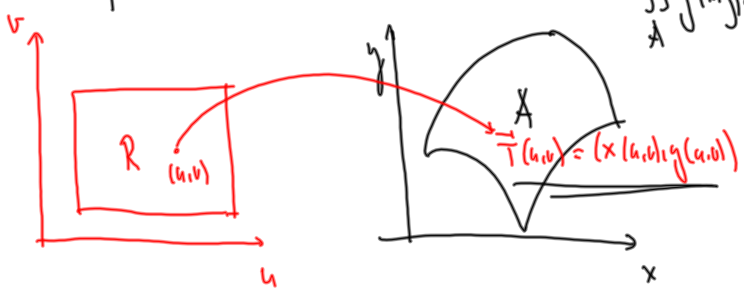
$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_{"V"} f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\underbrace{\rho^2\sin\varphi}_{\text{Jacobi-faktoren}}\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

V beskrevet i kulekoordinater.

Skifte av variabel:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$



$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f(x(u,v), y(u,v))\underbrace{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|}_{\text{Jacobi-faktor}}\,du\,dv$$

der

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

All you need is rekker

(i) Kunne konvergenstester for positive rekker og alternerende rekker

(ii) Finne konvergensintervall for potensrekker og $\underbrace{\text{finne summen}}_{\text{litt vanskelig}}$

Konvergenstester:

Integraltesten: $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergerer $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergerer.

Grensesammenligningstesten: $\sum a_n$, $\sum b_n$ er to positive rekker.

(i) Hvis $\sum a_n$ konvergerer og $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} < \infty$, så konvergerer også $\sum b_n$

(ii) Hvis $\sum a_n$ divergerer og $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} > 0$, så divergerer også $\sum b_n$.

Bruk: Gitt en rekke $\sum b_n$ med ukjente konvergensegenskaper, finn en "kjent" rekke å sammenligne med.

Forholdstesten/rottesten: $\sum a_n$ en rekke

(i) Hvis $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ / $\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ så ~~konv~~ konvergerer rekken.

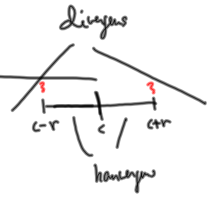
(ii) Hvis —"— > 1 / —"— > 1 så divergerer rekken

Hvis $= 1$ / $= 1$ så gir testen ingen konklusjon.

Alternerende rekker: Hvis $|a_n|$ avtar mot null, så konvergerer $\sum a_n$ og

$$|s_n - s| < |a_{n+1}|$$

Potensrekker: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$



Konvergensområde

Forholdstesten:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-c)^{n+1}}{a_n (x-c)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} |x-c| \right| = k\,|x-c|$$

Konvergerer når $k|x-c| < 1$, dvs $|x-c| < \frac{1}{k}$

divergerer når $k|x-c| > 1$, dvs $|x-c| > \frac{1}{k}$

Konvergensradius $\frac{1}{k}$.

Hva skjer i endepunktene? Sett inn og se etter.

Typisk sammenligningstest med $\frac{1}{n^p}$

Finn summen av rekken.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$ — integrer $n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

problem.

$$\frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

Integrer:

$$\int \frac{S(x)}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \cancel{n} \frac{x^n}{\cancel{n}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} x^n}_{\text{geometrisk rekke}} = \frac{x}{1-x} + C$$

Deriver:

$$\frac{S(x)}{x} = \frac{1(1-x) - x(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Ganger med x: $S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$