Konservative felt (3.5)

Når er et vektorfelt $\vec{F}$ en gradient?

Vet at hvis $\vec{F}$ er en gradient, så er $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ for alle i og j.

Men er denne betingelsen tilstrekkelig?

Definisjon: Vektorfeltet $\vec{F}$ er konservativt i området A dersom det finnes en deriverbar funksjon φ slik at

$$\vec{F}(\vec{x}) = \nabla\varphi(\vec{x}) \quad \text{for alle } \vec{x} \in A.$$

Eksempel: Vektorfeltet $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ er definert ved

$$\vec{F}(x,y) = \underbrace{-\frac{y}{x^2+y^2}}_{F_1}\vec{i} + \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{F_2}\vec{j} \quad \text{for } (x,y) = (0,0)$$

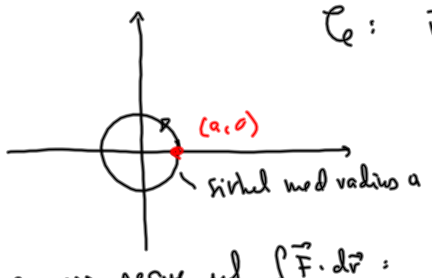
Sjekker om: $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{1\cdot(x^2+y^2) - y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{\overbrace{x^2+y^2-2y^2}^{x^2-y^2}}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{1\cdot(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Altså er $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ i hele definisjonsområdet $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Men er $\vec{F}$ konservativt i $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? Nei, men beviset er litt indirekte.



$\mathcal{C}$: $\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j}$, $t \in [0,2\pi]$.

Vi $\vec{F}$ er konservativt, dvs $\vec{F} = \nabla\varphi$, så:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} \nabla\varphi\cdot d\vec{r} = \varphi(\text{slutt}) - \varphi(\text{start})$$
$$= \varphi(a,0) - \varphi(a,0) = 0.$$

La oss regne ut $\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{v}(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\sin t}{a}\vec{i} + \frac{\cos t}{a}\vec{j}\right)\cdot\left(-a\sin t\,\vec{i} + a\cos t\,\vec{j}\right)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = \underline{\underline{2\pi}}$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \vec{F}(a\cos t, a\sin t)$$
$$= -\frac{a\sin t}{a^2}\vec{i} + \frac{a\cos t}{a^2}\vec{j}$$
$$= -\frac{\sin t}{a}\vec{i} + \frac{\cos t}{a}\vec{j}$$
$$\vec{v}(t) = -a\sin t\,\vec{i} + a\cos t\,\vec{j}$$

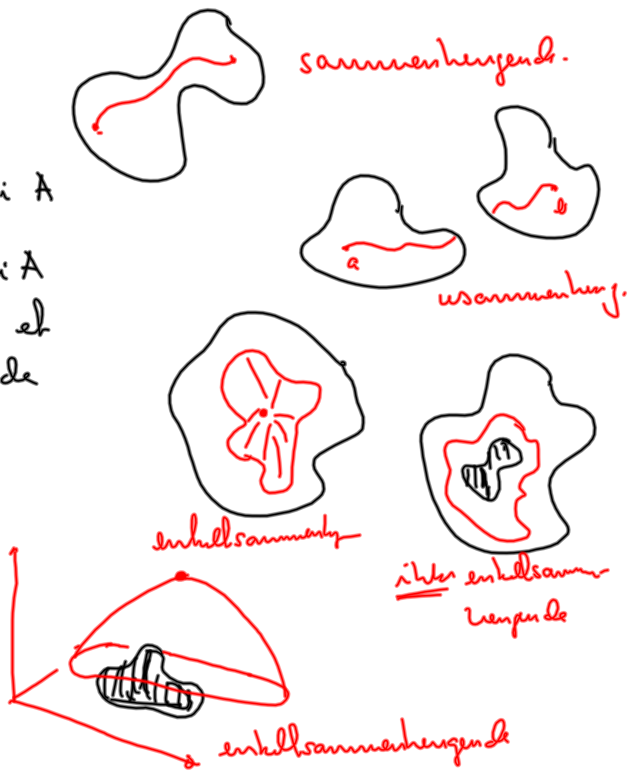
Konklusjon: $\vec{F}$ er ikke konservativt til tross for at $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ i hele definisjonsområdet $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Problemet er at området $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ikke er enkeltsammenhengende.

Hva er enkeltsammenhengende?

(i) To vilkårlige punkter i A kan alltid forbindes av en kontinuerlig kurve som ligger i A

(ii) Enhver kontinuerlig lukket kurve i A kan snurpes sammen til et punkt uten å forlate området



Teorem: Anta at A er et enkeltsammenhengende område i $\mathbb{R}^n$ og at $\vec{F}$ har kontinuerlige partiellderiverte på A. Da er $\vec{F}$ konservativt i A hvis og bare hvis

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\vec{x})$$ for alle indekser i og j og alle $x \in A$.

Nytt spørsmål: Hvis $\vec{F}$ er konservativt, hvordan finner vi en potensialfunksjon φ slik at $\vec{F} = \nabla\varphi$?

Eksempel: La $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\vec{F}(x,y,z) = \underbrace{(2xze^{y^2}+y)}_{F_1}\vec{i} + \underbrace{(2x^2yze^{y^2}+x)}_{F_2}\vec{j} + \underbrace{(x^2e^{y^2}+2z)}_{F_3}\vec{k}$$

Man kan vise at $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$, $\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}$, $\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$, så $\vec{F}$ er konservativt. Skal finne en φ slik at $\nabla\varphi = \vec{F}$, dvs

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = F_1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = F_2, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = F_3.$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= 2xze^{y^2}+y \Rightarrow \varphi = x^2ze^{y^2} + xy + C(y,z) \\
\frac{\partial\varphi}{\partial y} &= 2x^2yze^{y^2}+x \Rightarrow \varphi = \underline{x^2ze^{y^2}} + \underline{xy} + D(x,z) \\
\frac{\partial\varphi}{\partial z} &= x^2e^{y^2}+2z \Rightarrow \varphi = \underline{x^2ze^{y^2}} + \underline{z^2} + E(x,y)
\end{aligned}\right\}$$

φ må oppfylle alle disse kravene

Da må

$$\varphi = \underline{x^2ze^{y^2}} + \underbrace{xy}_{E(x,y)} + \overbrace{z^2}^{C(y,z)} \quad D(x,z)$$

Hurra!

$\vec{F} = \nabla\varphi$

Physics for glupies III: De sentrale kreftene i fysikk (gravitasjon, elektromagnetiske felt) er konservative.

$$\vec{F} = \nabla \varphi$$

Den potensielle energien i punktet $\vec{x}$ er da $E_p(\vec{x}) = -\varphi(\vec{x})$

— " — kinetiske — — er $\frac{1}{2} m v^2$

I et konservativt kraftfelt er den totale energien $E_p + E_k$ bevart.

Hvorfor: Husk: $\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} m v(b)^2 - \frac{1}{2} m v(a)^2$

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} \nabla\varphi \cdot d\vec{r} = \varphi(\vec{r}(b)) - \varphi(\vec{r}(a))$$

Altså:

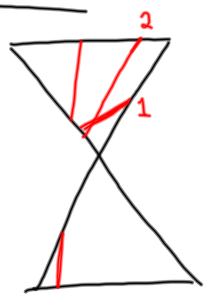
$$\varphi(\vec{r}(b)) - \varphi(\vec{r}(a)) = \frac{1}{2} m v(b)^2 - \frac{1}{2} m v(a)^2$$

$$\underbrace{-\varphi(\vec{r}(a))} + \frac{1}{2} m v(a)^2 = -\varphi(\vec{r}(b)) + \frac{1}{2} m v(b)^2$$

$$E_p(a) + E_k(a) = E_p(b) + E_k(b)$$

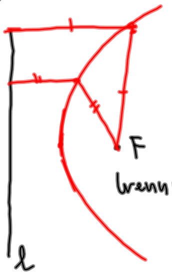
Total energi er bevart i bevegelse i et konservativt felt.

Kjeglesnitt (3.6)

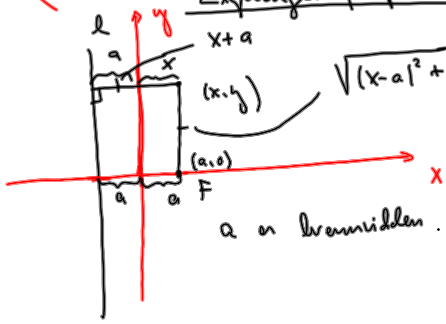


Parabler

Parabelen med styrelinje l og brennpunkt F består av alle punkter som har samme avstand fra l som fra F.



Ligninger for parabler



$\sqrt{(x-a)^2+y^2}$

a er brennvidden.

Må ha

$$x+a=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$$

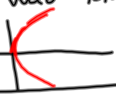
$\Downarrow$ kvadrerer

$$(x+a)^2=(x-a)^2+y^2$$

$$\cancel{x^2}+2ax+\cancel{a^2}=\cancel{x^2}-2ax+\cancel{a^2}+y^2$$

$$y^2=4ax$$

$$\boxed{\text{Ligningen til parabelen med styrelinje } x=-a \text{ og brennpunkt } (a,0) \text{ er } y^2=4ax}$$

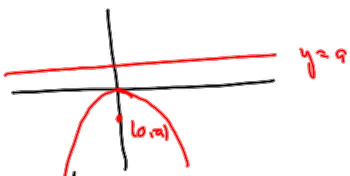


Noen varianter:

$y^2=-4ax$

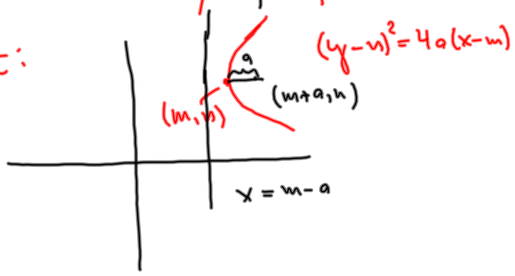
$x^2=4ay$

$x^2=-4ay$



Toppunkt andre steder:

$(y-n)^2=4a(x-m)$



<u>Eksempel</u>: Hvilken kurve fremstiller ligningen

$$\underbrace{x^2+4x}+4y-16=0$$

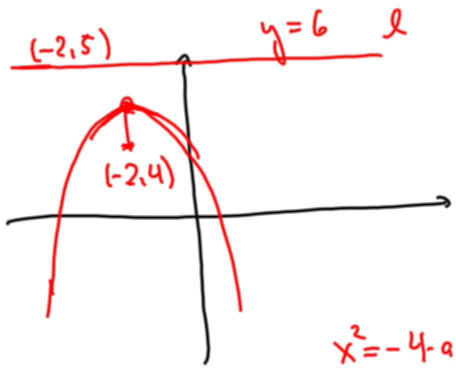
$$\underbrace{x^2+4x+4}_{(x+2)^2}-4+4y-16=0$$

$$(x+2)^2+\overbrace{4y-20}^{4(y-5)}=0$$

$$(x+2)^2=-4(y-5)$$

$$(x-(-2))^2=-4\cdot\underset{\substack{\uparrow\\ a}}{1}(y-5)$$

Minner om



$x^2=-4\cdot ay$