UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i:	MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra
Eksamensdag:	Fredag 30. mars 2012
Tid for eksamen:	15.00 – 17.00
Oppgavesettet er på 8 sider.	
Vedlegg:	Svarark, formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Løsningsforslag

Oppgave 1. (3 poeng) En parametrisert kurve er gitt ved $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j}$. Farten $v(t)$ er lik:

A) $t\sqrt{1+t^2}$
B) $t + t^2$
C) $\sqrt{1+4t^2}$
D) $1 + 4t^2$
E) $2\sqrt{2t}$

Riktig svar: C) $\sqrt{1+4t^2}$.
Begrunnelse: Hastigheten er $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$, så farten blir $v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{1^2 + (2t)^2)} = \sqrt{1+4t^2}$.

Oppgave 2. (3 poeng) Hvilket kjeglesnitt fremstiller ligningen $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y = 11$?

A) Ellipsen med sentrum i $(1, -2)$ og halvakser $a = 2$, $b = 3$.
B) Det er ingen punkter som oppfyller ligningen.
C) Hyperbelen med sentrum i $(1, -2)$ og asymptoter $y + 2 = \pm\frac{3}{2}(x-1)$.
D) Hyperbelen med sentrum i $(2, 3)$ og asymptoter $y - 3 = \pm\frac{1}{2}(x-2)$.
E) Ellipsen med sentrum i $(2, 2)$ og halvakser $a = 1$, $b = 2$

Riktig svar: A) Ellipsen med sentrum i $(1, -2)$ og halvakser $a = 2$, $b = 3$.
Begrunnelse: Vi fullfører kvadratene:

$$9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y = 11 \iff 9(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 + 4y + 4) = 11 + 9 + 16$$

$$\iff 9(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 36 \iff \frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y+2)^2}{3^2} = 1$$

(Fortsettes på side 2.)

som er ligningen for en ellipse med sentrum i $(1, -2)$ og halvakser $a = 2$, $b = 3$.

Oppgave 3. (3 poeng) Hvis $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, så har matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ løsningen:

A) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

B) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

C) Det finnes ingen løsninger

D) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

E) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

<u>Riktig svar:</u> D) $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

<u>Begrunnelse:</u> Matriseligningen er ekvivalent med ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y &= 2 \\ 2x + 3y &= 1 \end{aligned}$$

som har løsningene $x = -4$, $y = 3$.

Oppgave 4. (3 poeng) Hvis $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er lineæravbildningen slik at $\mathbf{T}(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{T}(\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, så er matrisen til $\mathbf{T}$ lik:

A) $\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

<u>Riktig svar:</u> D) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

<u>Begrunnelse:</u> Siden $\mathbf{T}$ er lineær, har vi:

$$3\mathbf{T}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \mathbf{T}(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{T}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og

$$-\frac{1}{2}\mathbf{T}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \mathbf{T}(\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{T}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

og dermed er matrisen til $\mathbf{T}$ lik $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 5. (3 poeng) Den reduserte trappeformen til matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ er

A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
D)
E) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Riktig svar: E) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Begrunnelse: Vi har

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 6. (3 poeng) Hvis $\mathbf{F}(x,y) = x^2y\,\mathbf{i} + (x-y)\,\mathbf{j}$ og $\mathcal{C}$ er kurven parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j}$, $t \in [0,\pi]$, så er linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ lik:

A) $x^2y \int_0^\pi \cos t\,dt + 2(x-y)\int_0^\pi t\,dt$
B) $\int_0^\pi \left(t^2\sin^2 t\,\mathbf{i} + (\sin t - t^2)\mathbf{j}\right)\sqrt{\cos^2 t + 4t^2}\,dt$
C) $\int_0^\pi \left(\sin t\cos t + 2t^3\right)\,dt$
D) $\int_0^\pi \left(t^2\sin^3 t + t^2\sin t - t^4\right)\,dt$
E) $\int_0^\pi \left(t^2\sin^2 t\cos t + 2t\sin t - 2t^3\right)\,dt$

Riktig svar: E) $\int_0^\pi \left(t^2\sin^2 t\cos t + 2t\sin t - 2t^3\right)\,dt$
Begrunnelse: Vi har $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{F}(\sin t, t^2) = t^2\sin^2 t\,\mathbf{i} + (\sin t - t^2)\,\mathbf{j}$ og $\mathbf{r}'(t) = \cos t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j}$, som gir

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^\pi \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}(t)\,dt = \int_0^\pi (t^2\sin^2 t\,\mathbf{i} + (\sin t - t^2)\,\mathbf{j})\cdot(\cos t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j})\,dt =$$

$$= \int_0^\pi \left(t^2\sin^2 t\cos t + 2t\sin t - 2t^3\right)\,dt$$

Oppgave 7. (3 poeng) Hvis $\phi(x,y) = x^2y + x$ og $\mathcal{C}$ er kurven parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$, $t \in [0,\pi]$, så er $\int_{\mathcal{C}} \nabla\phi\cdot d\mathbf{r}$ lik

A) 0
B)1
C) $-\frac{1}{2}$

(Fortsettes på side 4.)

D) π
E) -2

Riktig svar: E) -2
Begrunnelse: $\int_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{r}(\pi)) - \phi(\mathbf{r}(0)) = \phi(-1,0) - \phi(1,0) = -2$

Oppgave 8. (3 poeng) Lineariseringen til funksjonen $\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y \\ x-y \end{pmatrix}$ i punktet $\mathbf{a} = (2,1)$ er gitt ved:

A) $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} -3x+2y+14 \\ x-2y+1 \end{pmatrix}$
B) $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 4x+4y-8 \\ x-y \end{pmatrix}$
C)$T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x-2y \\ 2x-y-2 \end{pmatrix}$
D) $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 4x-4 \\ -y+2 \end{pmatrix}$
E)$T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 4x+4y \\ x-y \end{pmatrix}$

Riktig svar: B) $T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 4x+4y-8 \\ x-y \end{pmatrix}$
Begrunnelse: Jacobi-matrisen er

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

så lineariseringen blir

$$T_{\mathbf{a}}\mathbf{F}(x,y) = \mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{F}'(\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x+4y-8 \\ x-y \end{pmatrix}$$

Oppgave 9. (3 poeng) A er området i første kvadrant avgrenset av x-aksen, linjen $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ og sirkelen $x^2+y^2 = 4$. Da er $\iint_A (x^2+y^2-x)\,dxdy$ lik:

A) $\int_0^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(r^2 - r\cos\theta\right)\,d\theta\right]\,dr$

B) $\int_0^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(r^3 - r^2\cos\theta\right)\,d\theta\right]\,dr$
C) $\int_0^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(r^2 - r\cos\theta\right)\,d\theta\right]\,dr$
D) $\int_0^4 \left[\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(r^3 - r^2\cos\theta\right)\,d\theta\right]\,dr$

E) $\int_0^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(r^3 - r^2\cos\theta\right)\,d\theta\right]\,dr$

Riktig svar B): $\int_0^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(r^3 - r^2\cos\theta\right)\,d\theta\right]\,dr$
Begrunnelse: Linjen $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ danner en vinkel $\frac{\pi}{6}$ med x-aksen, og $x^2+y^2 = 4$ er en sirkel med radius 2. Skifter vi til polarkoordinater (husk Jacobi-faktoren

(Fortsettes på side 5.)

r), får vi:

$$\iint_A (x^2+y^2-x)\,dxdy = \int_0^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - r\cos\theta\right) r\,d\theta\right] dr =$$

$$= \int_0^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(r^3 - r^2\cos\theta\right)\,d\theta\right] dr$$

Oppgave 10. (3 poeng) Volumet til området som ligger over xy-planet, under grafen til $z = x^2+y^2$ og inni sylinderen $x^2+y^2=1$, er:

A) $\frac{3}{2}$
B) 2
C) $\frac{\pi}{2}$
D) $\frac{\pi^2}{6}$
E) $\frac{\pi}{3}$

Riktig svar: C) $\frac{\pi}{2}$
Begrunnelse: La A være sirkelskiven om origo med radius 1 i xy-planet. Da er

$$V = \iint_A (x^2+y^2)\,dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^{2\pi} r^3\,d\theta\right] dr = 2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

Oppgave 11. (3 poeng) En flate er parametrisert ved $\mathbf{r}(u,v) = (u-v)\,\mathbf{i} + (u+v)\,\mathbf{j} + u\,\mathbf{k}$, der $0\le u\le 1, 0\le v\le 1$. Arealet til flaten er

A) $\sqrt{5}$
B) 2
C) $\sqrt{6}$
D) $\frac{5}{2}$
E) 3

Riktig svar: C) $\sqrt{6}$

Begrunnelse: Vi har $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ og $\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = -\mathbf{i}+\mathbf{j}$, og dermed er

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\,\mathbf{k}$$

og $\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right| = \sqrt{(-1)^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$. Vi får

$$\text{Areal} = \int_S 1\,dS = \int_0^1\int_0^1 \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right| dudv = \int_0^1\int_0^1 \sqrt{6}\,dudv = \sqrt{6}$$

Oppgave 12. (3 poeng) Anta at R er rektangelet $[0,3]\times[0,2]$, og la $\mathcal{C}$ være randkurven til R med positiv orientertering. Da er $\int_{\mathcal{C}}(xy^2\,dx - x^2y\,dy)$ lik:
A) -36
B) 20
C) -30
D)-45

(Fortsettes på side 6.)

E) 25

Riktig svar: A) -36

Begrunnelse: Vi skal bruke Greens teorem med $P(x,y) = xy^2$ og $Q(x,y) = -x^2y$. Da er $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2xy$ og $\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy$. Dette gir

$$\int_{\mathcal{C}} (P\,dx + Q\,dy) = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_0^2 \int_0^3 -4xy\,dxdy =$$

$$-\int_0^2 \left[2x^2y\right]_{x=0}^{x=3} dy = -\int_0^2 18y\,dy = -\left[9y^2\right]_0^2 = -36$$

Oppgave 13. (3 poeng) Finn alle løsningene til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x+y+z &= 2 \\ 2x+2y+3z &= 2 \\ 3x+3y+4z &= 4 \end{aligned}$$

er gitt ved:

A) Systemet har ingen løsninger
B) $x = 4,\ y = 0,\ z = -2$
C) $x = 6,\ y = -2,\ z = -2$
D) $z = -2$, y kan velges fritt, men da må vi la $x = 4 - y$.
E) $x = 4,\ y = 1,\ z = -3$

Riktig svar: D) $z = -2$, y kan velges fritt, men da må vi la $x = 4 - y$.

Begrunnelse: Vi radreduserer den utvidede matrisen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Siden den bakerste søylen ikke er en pivotsøyle, har vi løsninger, og siden den andre søylen ikke er en pivotsøyle, kan y velges fritt. Fra linje nummer 2 ser vi at $z = -2$, og setter vi dette inn i den øverste linjen, får vi $x = 2 - y - z = 4 - y$.

Oppgave 14. (3 poeng) A er området i xy-planet avgrenset av de fire linjene $y = x$, $y = x+2$, $y = -x+1$, $y = -x+3$. Hvis vi innfører nye variable $u = y - x$, $v = y + x$, blir integralet $\iint_A xy\,dxdy$ lik:

A) $\int_0^2 \left[\int_1^3 (v^2 - u^2)\,dv\right] du$
B) $\int_0^2 \left[\int_1^3 (v^2 - u^2)uv\,dv\right] du$
C) $\int_0^2 \left[\int_1^3 \frac{v^2-u^2}{8}\,dv\right] du$
D) $\int_0^2 \left[\int_1^3 (v^2 - u^2)\ln(uv)\,dv\right] du$
E) $\int_0^2 \left[\int_1^3 (v^2 - u^2)(u+v)\,dv\right] du$

(Fortsettes på side 7.)

Riktig svar: C) $\int_0^2 \left[\int_1^3 \frac{v^2-u^2}{8}\,dv\right] du$.
Begrunnelse: Vi løser ligningene $u = y - x$, $v = y + x$ for x og y og får $x = \frac{v-u}{2}$ og $y = \frac{v+u}{2}$. Jacobi-determinanten er

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

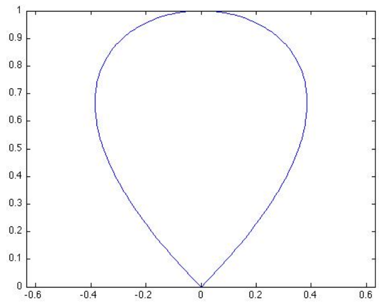
Siden $u = y - x$ varierer mellom 0 og 2, og $v = y + x$ varierer mellom 1 og 3, får vi

$$\iint_A xy\,dxdy = \int_0^2 \left[\int_1^3 \frac{v-u}{2}\cdot\frac{v+u}{2}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dv\right] du = \int_0^2 \left[\int_1^3 \frac{v^2-u^2}{8}\,dv\right] du$$

Oppgave 15. (4 poeng) MATLAB-sekvensen

```
t=-1:0.01:1;
x=t.^3-t;
y=1-t.^2;
plot(x,y)
axis('equal')
```

produserer figuren nedenfor. Finn arealet til området avgrenset av kurven.



A) $\frac{1}{2}$
B) $\frac{2}{5}$
C) $\frac{5}{12}$
D) $\frac{8}{15}$
E) $\frac{5}{9}$

Riktig svar: D) $\frac{8}{15}$.

Begrunnelse: Kurven som beskrives er

$$\mathbf{r}(t) = (t^3 - t)\,\mathbf{i} + (1 - t^2)\,\mathbf{j} \qquad \text{der } t \in [-1, 1]$$

og er positivt orientert. Ifølge Greens teorem er arealet omsluttet av kurven, gitt ved

$$\text{Areal} = \int_{\mathcal{C}} x\,dy = \int_{-1}^{1} (t^3-t)(-2t)\,dt = \int_{-1}^{1} (2t^2-2t^4)\,dt = \left[\frac{2t^3}{3} - \frac{2}{5}t^5\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{15}$$

Oppgave 16. (4 poeng) Volumet til legemet avgrenset av paraboloiden $z = x^2 + y^2$ og planet $z = 2x + 2y + 2$ er

(Fortsettes på side 8.)

A) 8π
B) 7π
C) 10π
D) 9π
E) $2\sqrt{3}\pi$

Riktig svar: A) 8π.

Begrunnelse: Skjæringskurven mellom de to flatene er gitt ved

$$x^2 + y^2 = 2x + 2y + 2 \Longleftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$$

og er altså en sirkel med radius 2 om punktet $(1,1)$. Lar vi D være sirkelskiven, ser vi at

$$\text{Volum} = \iint_D \left(2x+2y+2-(x^2+y^2)\right)dxdy = \iint_D \left(4-(x-1)^2-(y-1)^2\right)dxdy$$

Skifter vi til polarkoordinater med sentrum i $(1,1)$, får vi

$$\text{Volum} = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4-r^2)r\,d\theta dr = 2\pi \int_0^2 (4r - r^3)\,dr =$$

$$= 2\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi$$

SLUTT