UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra.
Eksamensdag:	Fredag 13. juni 2014.
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle deloppgaver (1a, 1b, 2a, 2b, 3 osv.) teller 10 poeng. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1 La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

med redusert trappeform

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Angi antallet lineært uavhengige søyler i A, og finn alle løsninger til ligningssettet

$x + 3y + 3z + 2w = 0$

$2x + y + 2z - 3w = 0$

$x + y + z - w = 0$

$2x + y + z - 4w = 0$

b) Skriv en av søylene i A som en lineærkombinasjon av de andre.

Løsning:

a) Antall lineært uavhengige søyler i A er antall pivotsøyler i B, så vi har tre lineært uavhengige søyler.

A løse ligningssystemet er det samme som å løse matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, som igjen er det samme som å løse $B\mathbf{x} = 0$. Denne ser vi at har

(Fortsettes på side 2.)

løsninger $z = -w, y = -w$ og $x = 3w$, altså er alle løsninger gitt ved $(3w, -w, -w, w), w \in \mathbb{R}$.

b) Her kan man enten bruke a) eller man kan observere at en lineær avhengighetsrelasjon mellom søylene i B gir en relasjon mellom søylene i A. Så lar vi søylene betegnes med $\mathbf{v}_j, j = 1, ..., 4$, ser vi at $\mathbf{v}_4 = -3\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$.

Oppgave 2 La S være mengden

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

og la f være funksjonen $f(x, y, z) = xz - y^2$. Bruk Lagrange til å finne maksimum og minimum for f på S.

Løsning;

Setter vi $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ skal vi altså optimere/minimere f under bibetingelsen $g = 1$. Vi har $\nabla g(x, y, z) = 2(x, y, z)$ og $\nabla f(x, y, z) = (z, -2y, x)$ og vi må løse $\nabla f = \lambda \nabla g$ under betingelsen $g = 1$. Dette leder til ligningene

(i) $z = \lambda x$

(ii) $-2y = \lambda y$

(iii) $x = \lambda z$

Dersom $y \neq 0$ må vi ha $\lambda = -2$, og siden (i) og (ii) samlet gir oss $z = \lambda^2 z$ får vi $z = 0$ og dermed også $x = 0$. Dermed må $y = \pm 1$ så $(0, 1, 0)$ og $(0, -1, 0)$ er kandidater med funksjonsverdier -1. I tilfellet $y = 0$ ser vi fra (i) og (iii) at $\lambda = \pm 1$. Fra bibetingelse har vi for $\lambda = 1$ at kandidatene blir $(\pm\sqrt{2}/2, 0, \pm\sqrt{2}/2)$ med funksjonsverdi $1/2$, og for $\lambda = -1$ blir kandidatene $(\pm\sqrt{2}/2, 0, \mp\sqrt{2}/2)$ med funksjonsverdi $-1/2$. Dermed er minimumsverdien -1 og maksimumsverdien $1/2$.

Oppgave 3

La C være matrisen

$$C = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 7/6 \end{pmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen C.

b) La $\mathbf{w} = (3, 0)$. Finn grensen $\lim_{n\to\infty} C^n \mathbf{w}$.

Løsning:

a) Dn karakteristiske ligningen er

$$(\lambda - 1/3)(\lambda - 7/6) + 1/9 = \lambda^2 - 3/2\lambda + 1/2 = 0,$$

så egenverdiene er $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 1/2$.

Egenvektor for $\lambda_1 : 1/3x - 1/3y = x$ som gir $y = -2x$, så vi kan sette $\mathbf{v}_1 = (1, -2)$.

Egenvektor for $\lambda_2 : 1/3x - 1/3y = 1/2x$ som gir $2y = -x$, så vi kan sette $\mathbf{v}_2 = (-2, 1)$.

b) Vi ser at $\mathbf{w} = -\mathbf{v_1} - \mathbf{2v_2}$. Så vi får at

$$C^n\mathbf{w} = C^n(-\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2) = -C^n(\mathbf{v}_1) - 2C^n(\mathbf{v}_2) = -1^n\mathbf{v}_1 - 2(1/2)^n\mathbf{v}_2,$$

(Fortsettes på side 3.)

så vi ser at $\lim_{n\to\infty} C^n(\mathbf{w}) = -\mathbf{v}_1 = (-1, 2)$.

Oppgave 4 La $f(x, y) = x^2y + yx + y^2$

a) Finn de stasjonære punktene til f.

b) Avgjør om de stasjonære punktene er maksima, minima, eller sadelpunkter.

a) Vi har

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + y = y(2x + 1)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + x + 2y$

Dersom $y = 0$ må vi ha at $x^2+x = x(x+1) = 0$, altså får vi punktene $(0, 0)$ og $(-1, 0)$. Dersom $2x+1 = 0$ har vi $x = -1/2$, og vi får $(-1/2)^2-1/2+2y = 0$, som gir oss punktet $(-1/2, 1/8)$.

b) Vi har at Hessematrisen er

$$H = \begin{pmatrix} 2y & 2x + 1 \\ 2x + 1 & 2 \end{pmatrix}$$

I punktet $(0, 0)$ har vi $\triangle = -1$ så dette er et sadelpunkt. I punktet $(-1, 0)$ har vi også $\triangle = -1$, så dette er også et sadelpunkt. I punktet $(-1/2, 1/8)$ har vi $\triangle = 1/2 > 0$, og siden $2 \cdot 1/8 > 0$ er dette et lokalt minimum.

Oppgave 5 Avgjør om rekkene $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}$ og $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2+7n}{2n^3+n}$ konvergerer eller divergerer.

Løsning:

Vi har at $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}/((2(n+1))!)}{2^n/(2n)!} = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1$, så den første rekka konvergerer ved forholdstesten.

For den andre rekka bruker vi sammenligningstesten: Vi har at

$$\frac{3n^2 + 7n}{2n^3 + n} = \frac{n^2(3 + 7/n)}{n^3(2 + 1/n^2)} \geq \frac{1}{n},$$

og siden $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ divergerer, så divergerer vår rekke også (den nederste grensen skulle forøvrig ha vært $n = 1$).

Oppgave 6 La $f(x, y, z)$ være funksjonen

$$f(x, y, z) = z + x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1$$

og la Z betegne mengden av punkter (x, y, z) slik at $f(x, y, z) = 0$.

a) Mengden av punkter der Z skjærer (x, y)-planet er et kjeglesnitt. Finn dette.

b) La nå S være den begrensete mengden i $\mathbb{R}^3$ som er avgrenset av (x, y)-planet og Z. Finn

$$\int\int\int_S z dx dy dz.$$

(Fortsettes på side 4.)

Løsning:
a) Skjæring med planet er gitt ved ligningen

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1 \\ &= (x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + 1 \\ &= (x-1)^2 + (y-2)^2 - 4. \end{aligned}$$

Denne ligningen definerer en sirkel med radius 2 sentrert i $(1, 2)$.

b) Dersom vi lar A betegne området avgrenset av sirkelen vi fant, får vi at

$$\begin{aligned} I = \int\int\int_S z dx dy dz &= \int\int_A \left(\int_0^{-(x^2-2x+y^2-4y+1)} z dz\right) dx dy \\ &= \int\int_A \left(\int_0^{4-(x-1)^2-(y-2)^2} z dz\right) dx dy \\ &= (1/2)\int\int_A (4 - (x-1)^2 - (y-2)^2)^2 dx dy \end{aligned}$$

Skifter vi nå til polarkoordinater $x = 1 + r\cos(t), y = 2 + r\sin(t), 0 \leq r \leq 2, 0 \leq t \leq 2\pi$, får vi at

$$\begin{aligned} I &= (1/2)\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4-r^2)^2 r dr dt \\ &= \pi\int_0^2 (4-r^2)^2 r dr \\ &= \pi[-(1/6)(4-r^2)^3]_0^2 = 32\pi/3. \end{aligned}$$

Hvis man ikke klarer å "gjette" hva den antideriverte er i den siste overgangen, kan man bruke substitusjon. Hvis vi setter $u = 4 - r^2$, får vi $du = -2r dr$, eller $r dr = -1/2 du$, og de nye grensene blir 4 og 0. Altså:

$$I = \pi\int_4^0 u^2(-1/2) du = \pi[(-1/6)u^3]_4^0 = 4^3\pi/6 = 32\pi/3.$$

SLUTT