PRØVEEKSAMEN MAT1110 - VÅR 2014

1. Oppgaven

Oppgave 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Finn den reduserte trappeformen til A. Finn alle løsninger til matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

b) Finn en lineær avhengighetsrelasjon mellom søylene i matrisen A.

Løsning: a)

$$\text{rref}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Siden den utvidete mastrisen til ligningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 8 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

og rref(B) således er

$$\text{rref}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

blir alle løsningene gitt ved $y = z$ og $x = -3z$, der z er fri, altså $(-3z, z, z), z \in \mathbb{R}$.

b) Hvis vi kaller søylene i for A $\mathbf{v}_j, j = 1, 2, 3$, har vi fra a) at

$$-3z \cdot \mathbf{v_1} + z \cdot \mathbf{v_2} + z \cdot \mathbf{v_3} = 0,$$

så hvis vi for eksempel setter $z = 1$ får vi

$$-3 \cdot \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3} = 0.$$

Oppgave 2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen A.

b) La $\mathbf{w} = (1, -3)$. Fin $\lim_{n\to\infty}(1/3)^n \cdot A^n\mathbf{w}$.

Date: June 12, 2014.

a) Den karakteristiske ligningen er $(\lambda-1)(\lambda-4)+2=0$, som har røtter $\lambda_1=2$ og $\lambda_2=3$, som altså er egenverdiene til B. Egenvektor for λ_1: løser $x-y=2x$, som gir $y=-x$, så $\mathbf{v}_1=(1,-1)$ er en egenvektor. Egenvektor for λ_2: løser $x-y=3x$ som gir $y=-2x$, så $\mathbf{v}_2=(1,-2)$ er en egenvektor.

b) Vi ser at $\mathbf{w}=2\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1$. Da får vi at

$$\lim_{n\to\infty}(1/3)^n A^n\mathbf{w}=\lim_{n\to\infty}(1/3)^n\cdot(3^n\cdot 2\mathbf{v_2}-2^n\mathbf{v}_1)=2\mathbf{v}_2.$$

Oppgave 3 Avgjør om rekkene $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2n+1}{n+3}$ og $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^n}{(n+1)!}$ konvergerer eller divergerer.

Vi ser at leddene i den første rekka ikke går mot null når n går mot uendelig, så rekka divergerer ved divergenstesten (et tredjegradspolynom vokser mye raskere en et førstegradspolynom).

For den andre rekka bruker vi forholdstesten:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}/((n+2)!)}{e^n/(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}}{e^n}\frac{(n+1)!}{(n+2)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{e}{n+2}=0<1,$$

Oppgave 4

Bruk Lagrange til å finne punktet på flaten $x^2+2y^2-z^2=1$ i $\mathbb{R}^3$ som er nærmest origo.

Lar vi $g(x,y,z)=x^2+2y^2-z^2$ og $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, er oppgaven da å minimere f på flaten $\{g=1\}$. Merk at det må finnes en løsning.

Vi har at $\nabla g(x,y,z)=(2x,4y,-2z)=2(x,2y,-z)$ og $\nabla f(x,y,z)=2(x,y,z)$, så vi får ligningene

(i) $x=\lambda x$,
(ii) $y=2\lambda y$,
(iii) $z=-\lambda z$,
(iv) $g(x,y,z)=1$.

Hvis $z\neq 0$ ser vi fra (iii) at $\lambda=-1$, og da følger det fra (i) og (ii) at $x=y=0$. Men da kan vi umulig ha (iv). Så $z=0$.

Hvis $y\neq 0$ følger det fra (ii) at $\lambda=1/2$, og da følger det fra (i) at $x=0$. Fra (iv) følger det da at $y=1/\sqrt{2}$, og $f(0,1/\sqrt{2},0)=1/2$.

Til sist, hvis $y=0$ følger det fra (iv) at $x=1$, og $f(1,0,0)=1$.

Så det nærmeste punktet er $(0,1/\sqrt{2},0)$.

Oppgave 5

Flatene $z=2-x^2-y^2$ og $z=x^2-2x+y^2-2y$ skjærer hverandre i en lukket kurve Γ.

a) Finn en parametrisering av kurven Γ.
b) Finn volumet av området mellom de to flatene.

a) Finner først (x, y)-koordinatene der hvor flatene skjærer hverandre.

$$
\begin{aligned}
&2 - x^2 - y^2 = x^2 - 2x + y^2 - 2y \\
&\Leftrightarrow 2 = 2x^2 - 2x + 2y^2 - 2y \\
&\Leftrightarrow 1 = x^2 - x + y^2 - y = (x - 1/2)^2 - 1/4 + (y - 1/2)^2 - 1/4 \\
&\Leftrightarrow 3/2 = (x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2
\end{aligned}
$$

Så (x, y)-koordinatene ligger på en sirkel S med radius $\sqrt{3/2}$ sentrert i $(1/2, 1/2)$, og denne kan parametriseres ved

$$(x(t), y(t)) = (1/2 + \sqrt{3/2}\cos(t), 1/2 + \sqrt{3/2}\sin(t)), t \in [0, 2\pi].$$

Bruker vi nå at $z = 2 - x^2 - y^2$ får vi at kurven er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (1/2+\sqrt{3/2}\cos(t), 1/2+\sqrt{3/2}\sin(t), 2-(1/2+\sqrt{3/2}\cos(t))^2-(1/2+\sqrt{3/2}\sin(t))^2)$$

for $t \in [0, 2\pi]$.

b) Vi har at volumet er gitt ved

$$V = \int\int_S 2 - x^2 - y^2 - (x^2 - 2x + y^2 - 2y)dxdy,$$

og fullfører vi kvadratene (se regninger over) får vi at

$$V = 2 \cdot \int\int_S 3/2 - (x - 1/2)^2 - (y - 1/2)^2 dxdy.$$

Vi innfører polarkoordinater $x = 1/2 + r\cos(t), y = 1/2 + r\sin(t), r \in [0, \sqrt{3/2}], t \in [0, 2\pi]$, og får

$$
\begin{aligned}
V &= 2 \cdot \int_0^{\sqrt{3/2}} \int_0^{2\pi} (3/2 - r^2) r dr dt \\
&= 4\pi \cdot \int_0^{\sqrt{3/2}} (3/2)r - r^3 \\
&= 4\pi[(3/4)r^2 - (1/4)r^4]_0^{\sqrt{3/2}} \\
&= 4\pi[9/8 - 9/16] = (9\pi)/4.
\end{aligned}
$$

Oppgave 6 Vi definerer et vektorfelt

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + zy + y^2, x^2 + xz + 2xy + y^2, xy + z).$$

a) Vis at $\mathbf{F}$ er konservativt ved å finne et potensiale til $\mathbf{F}$.
b) Finn

$$\int_\Gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

der Γ er kurven fra forrige oppgave.

a) Må ha at $\partial\phi/\partial x = 2xy+zy+y^2$, så vi forsøker oss først med $\phi(x,y,z) = x^2y + xyz + xy^2$. Da får vi at $\partial\phi/\partial y = x^2 + xz + 2xy$. Dette matcher andrekomponenten til $\mathbf{F}$ bortsett fra y^2-leddet, så vi kan korrigere og redefinere $\phi(x,y,z) = x^2y+xyz+xy^2+(1/3)y^3$. Da får vi at $\partial\phi/\partial z = xy$, så vi trenger en siste korreksjon, og det endelige svaret blir

$$\phi(x,y,z) = x^2y + xyz + xy^2 + (1/3)y^3 + (1/2)z^2.$$

b) Siden Γ er en lukket kurve, og $\mathbf{F}$ er konservativt får vi at $\int_\Gamma \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 0$.