Rekker (Kalkulus)

Uformelt: En rekke er en uendelig sum

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

Formelt: Delsummer:

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_N$$

Definisjon: Vi sier at rekken $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer dersom $\lim_{N \to \infty} s_N$ eksisterer (er et tall!). I så fall skriver vi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ for denne grenseverdien. Hvis rekken ikke konvergerer, sier vi at den divergerer.

Eksempel: Geometrisk rekke:

$$a_0 + r a_0 + r^2 a_0 + \dots + r^n a_0 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n$$

$$s_N = a_0 + r a_0 + r^2 a_0 + \dots + \underline{r^N} a_0 = a_0 \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r} \qquad r \neq 1$$

Konvergens for $|r| < 1$: $s = a_0 \dfrac{1}{1-r} = \dfrac{a_0}{1-r}$

Divergens ellers:

Hovedspørsmål:

1 Konvergerer rekken? Overkommelig

2 Hva konvergerer den mot? (Ofte vanskelig/umulig)

Positive rekker (rekker med positive ledd)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n , \quad a_n \ge 0$$

For slike muligheter er det bare to muligheter.

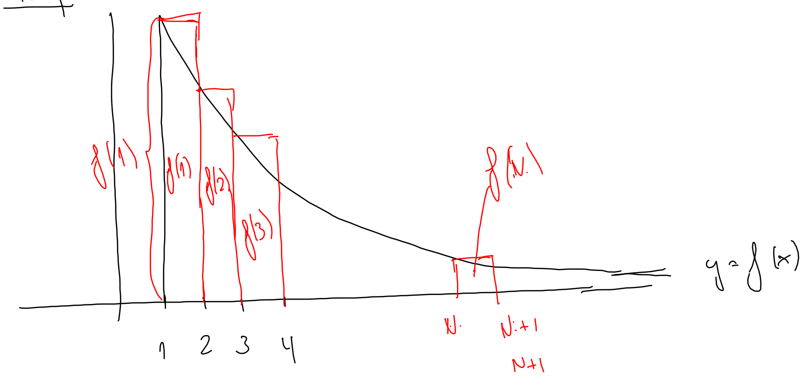
1: Rekken konvergerer.

2: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$ (dvs $s_N \to \infty$).

Triks: Det er nok å vise at delsummen er begrenset: $s_N \le M$ for alle N.

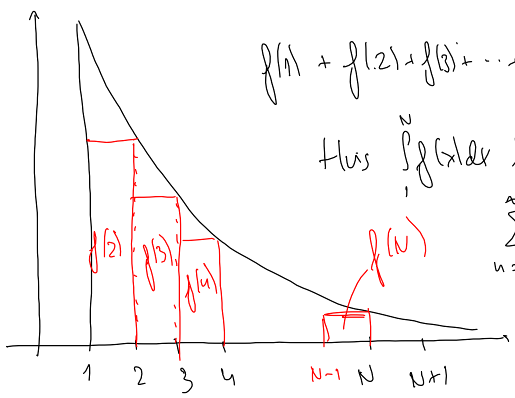
Integraltesten: Anta at $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ er en positiv, avtagende funksjon. Da konvergerer rekken $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ hvis og bare hvis integralet $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergerer.

Hvorfor:



$$s_N = f(1)+f(2)+\dots+f(N) \ge \int_1^{N+1} f(x)\,dx$$

Hvis $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ divergerer, divergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$



$$f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(N) \le f(1)+\int_1^{N} f(x)\,dx$$

Hvis $\int_1^{N} f(x)\,dx$ konvergerer, så gjør $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ det også.

Eksempel: Konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$?

Ser på integralet

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^{a} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \left[\ln a - \underbrace{\ln 1}_{0}\right] = \infty.$$

Integralet divergerer, så rekken divergerer.

Setning: Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergerer når $p>1$ og divergerer når $p \le 1$.

Bevis: Ser på integralet:

$$p \neq 1 \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^{a} x^{-p}\,dx = \lim_{a\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^a$$

$$\lim_{a\to\infty} \frac{a^{1-p}}{1-p} - \frac{1^{1-p}}{1-p} \quad \begin{cases} \infty \\ -\frac{1}{1-p} \end{cases}$$

$p<1$ divergerer

$p=1$ divergerer

$p>1$ konvergerer

Divergenstesten: Dersom rekken $\sum a_n$ konvergerer, så vil $a_n \to 0$. Men $\sum a_n$ kan godt divergere selv om $a_n \to 0$ (eksempel $\sum \frac{1}{n}$).

ukjent oppførsel kjent oppførsel

Sammenligningstesten: Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ er to positive rekker:

(i) Dersom $a_n \ge b_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergerer, så divergerer også $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

(ii) Dersom $a_n \le b_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergerer, så konvergerer også $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Hvorfor; (i) $\sum_{n=0}^{N} b_n \le \sum_{n=0}^{N} a_n$

$\downarrow \infty \qquad \downarrow \infty$

(ii) $\sum_{n=1}^{N} a_n \le \sum_{n=1}^{N} b_n \le \sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$

konvergerer.

Eksempel: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+3}$, ser at $\frac{1}{n^2+2n+3} < \frac{1}{n^2}$

Rekken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerer, så konvergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+3}$

$\sum b_n \qquad \sum a_n$

Grensesammenligningskriteriet: Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ er to positive rekker.

(i) Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergerer og $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$, så konvergerer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ også.

(ii) Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergerer og $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$, så divergerer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ også.

Eksempel: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+2n}{4n^3+3n+1}$ a_n

$$\frac{n^2+2n}{4n^3+3n+1} = \frac{n^2(1+\frac{2}{n})}{n^3(4+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3})} = \frac{1}{n}\frac{(1+\frac{2}{n})}{(4+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3})} \sim \frac{1}{4n} \sim \frac{1}{n}$$

Sammenligner med $\sum \frac{1}{n}$

Sammenligner med $\sum \frac{1}{n}$ b_n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\frac{1}{n}}\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{4+3/n^2+1/n^3}\right)}{\cancel{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{4} > 0$$

Konklusjon: $\sum a_n$ divergerer siden $\sum b_n$ gjør det.

Eksempel: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$ $\sum a_n$

$\sin x \sim x$ $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Sammenligner med $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ b_n

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n^{-2}}{n^{-2}}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{n^2}\,\cancel{(-2n^{-3})}}{\cancel{(-2n^{-3})}} = 1 < \infty$$

$\sum \sin\frac{1}{n^2}$ konvergerer fordi $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergerer.

Forholdstesten: Anta at $\sum a_n$ er en positiv rekke:

1. Dersom $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, Då konvergerer rekken.

2. Dersom $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, Då divergerer rekken.

3. Dersom $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, Då gir testen ingen konklusjon.

Rottesten: Anta at $\sum a_n$ er en positiv rekke

1. Dersom $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, Då konvergerer rekken

2. —— " —— > 1, Då divergerer rekken

3. —— " —— $= 1$, Då gir testen ingen konklusjon.

Alternerende rekker:

En rekke er alternerende dersom fortegnet skifter fra ledd til ledd:

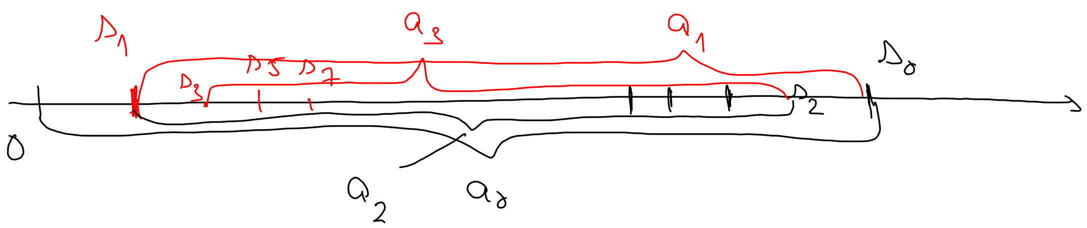
Eks: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

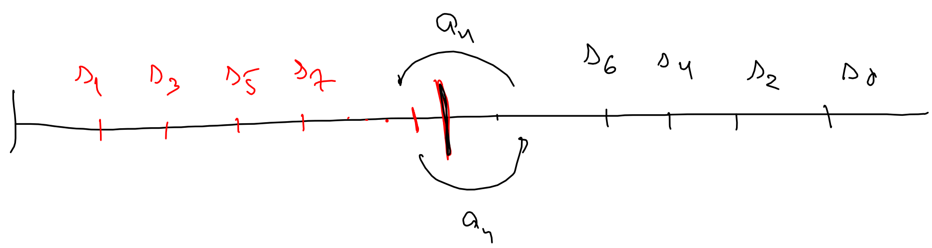
Teorem (alternerende rekke test): Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ er en alternerende rekke der størrelsen $|a_n|$ av leddene avtar mot 0. Da konvergerer rekken og

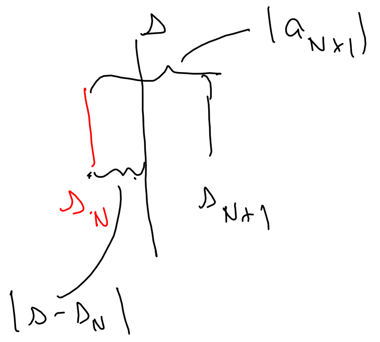
$$|s - s_N| \leq |a_{N+1}|$$

$\left(\text{der } s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ og } s_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \right)$

Hvorfor:







$|s - s_N| \leq |a_{N+1}|$

Absolutt konvergens og betinget konvergens

Dersom $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer, men $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ divergerer, så sier vi

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer betinget. (Eksempel: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$)

Dersom $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergerer, sier vi at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer absolutt.

Setning: Enhver absolutt konvergent rekke er konvergent

Forholdstesten/rottesten for generelle rekker:

1. Dersom $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$ / $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ så konvergerer rekken absolutt.

2. Dersom —"— > 1 / —"— > 1 så divergerer rekken

3. Dersom —"— $= 1$ / —"— $= 1$ så gir testen ingen konklusjon.

Hva gjør vi når vi treffer en generell rekke $\sum a_n$?

1. Sjekk om leddene er positive $\xrightarrow{\text{JA}}$ HURRA!

   ↓ NEI

2. Er rekken alternerende $\xrightarrow{\text{JA}}$ HURRA!

   ↓ NEI

3. Sjekk om rekken konvergerer absolutt $\xrightarrow{\text{JA}}$ HURRA

   NEI ↓ $\sum |a_n|$

You're in big shit, baby. Da må du tenke sjøl!

Kristina foreleser på torsdag. → 12.6 + 12.7 + (12.8)