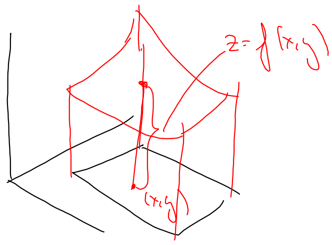
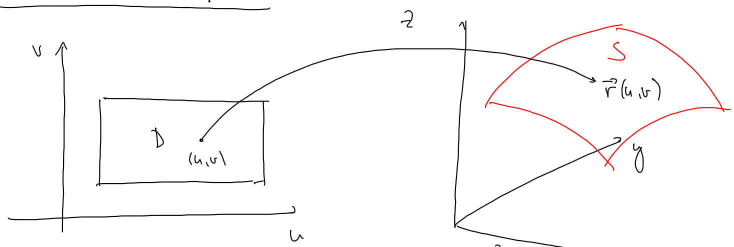
Flater

Funksjonsgraf: $z = f(x,y)$

Implisitt gitte flater: $g(x,y,z) = 0$

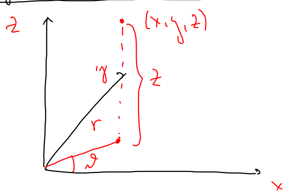


Parametriserte flater.



$$\vec{r}(u,v) = X(u,v)\,\vec{i} + Y(u,v)\,\vec{j} + Z(u,v)\,\vec{k}$$

Sylinderkoordinater: (r, θ, z)

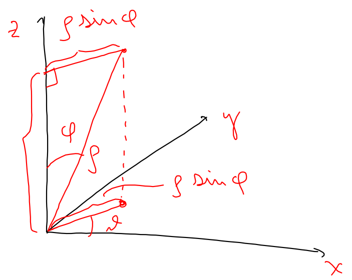


$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$z = z$

Kulekoordinater: (ρ, φ, θ)

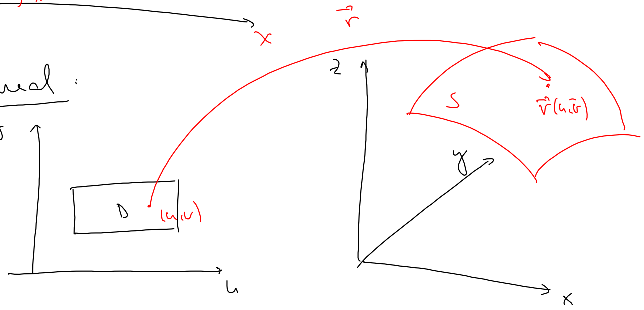


$x = \rho\sin\varphi\cos\theta$

$y = \rho\sin\varphi\sin\theta$

$z = \rho\cos\varphi$

Flateareal:



Areal til S:
$$A = \iint_D \underbrace{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right|}_{\text{fundamentalt vektorprodukt}} du\, dv$$

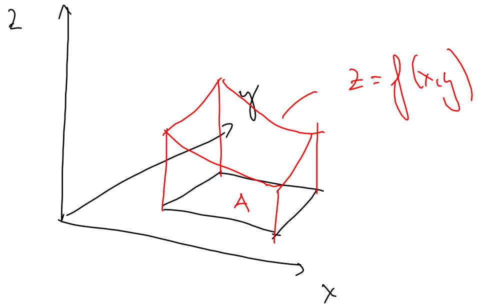
Flateintegral:
$$\int_S f\, dS = \iint_D f(\vec{r}(u,v)) \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| du\, dv$$

$f(X(u,v), Y(u,v), Z(u,v))$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u}\vec{i} + \frac{\partial Y}{\partial u}\vec{j} + \frac{\partial Z}{\partial u}\vec{k}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \dots\dots\dots$$

Dobbelt integraler



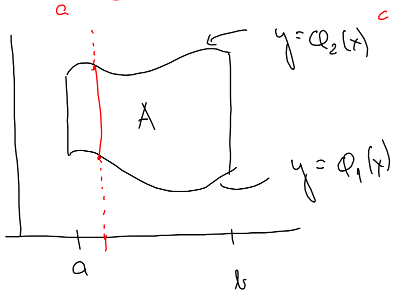
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

Iterete integraler:

$A = [a,b] \times [c,d]$

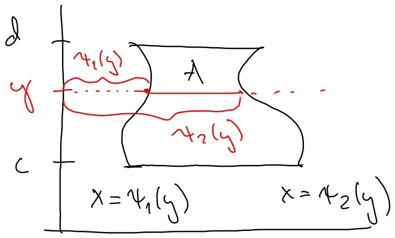
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy$$

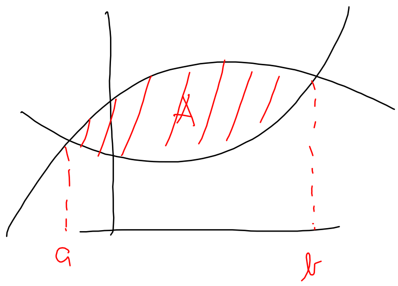
Type I:



$$\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy\right] dx = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

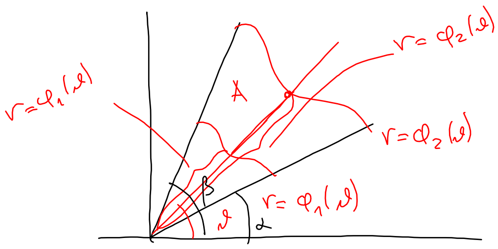
Type II:





$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx\right] dy$$

Integrasjon i polarkoordinater

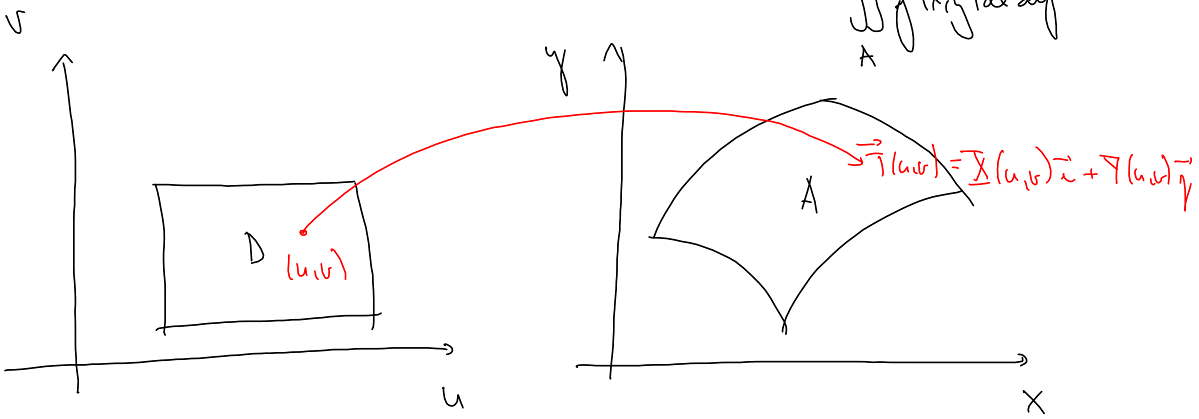


$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_\alpha^\beta \left[\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\right] d\theta$$

Jacobi-faktor

Bytte av variabel

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$

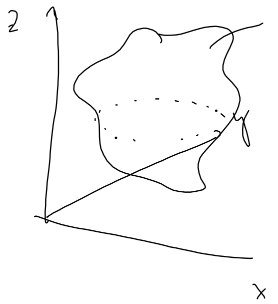


$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(T(u,v)) \left|\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

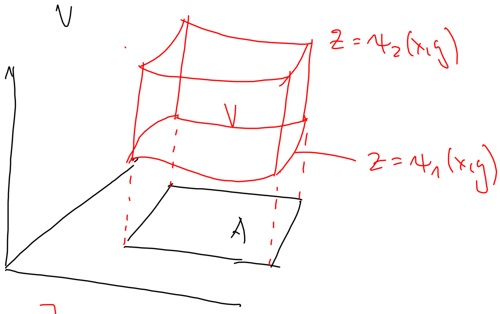
$$= \iint_D f(X(u,v),Y(u,v)) \underbrace{\left|\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\right|}_{\left|\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix}\right|} du\,dv$$

tallverdi

Trippelintegraler



$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$



$$\iiint_V = \iint_A \left[\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right]dx\,dy$$

Vanlig oppgavetype: Integrasjon over et område mellom to flater: $z = g(x,y)$, $z = f(x,y)$

V = området mellom flatene.

Skjæringskurven: $f(x,y) = g(x,y)$

$$\iiint_V h(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_A \left[\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} h(x,y,z)\,dz\right]dx\,dy$$

Volumet til V:

$$\iiint_V 1\,dx\,dy\,dz = \iint_A \left[\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} 1\,dz\right]dx\,dy$$

$$= \iint_A \left[f(x,y) - g(x,y)\right]dx\,dy$$

Bytte til sylinderkoordinater: Jacobi-determinant: r

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\text{"V"}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,dr\,d\theta\,dz$$

"V" ← V beskrevet i sylinderkoordinater.

Bytte til kulekoordinater: Jacobi-determinant: $\rho^2 \sin\varphi$

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\text{"V"}} f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

"V" ← V beskrevet i kulekoordinater.

Lineær algebra

Lineære ligningssystemer $\Longleftrightarrow$ $\underbrace{\text{matriseligninger}}_{A\vec{x}=\vec{b}}$ $\Leftrightarrow$ lineærkombinasjoner.

Ligningen $A\vec{x}=\vec{b}$ for en spesifisert $\vec{b}$: Radreduserer $[A,\vec{b}]$ til jeg får en matrise D på trappeform.

Hvis den siste søylen i D er en pivotsøyle, så har ligningen ingen løsninger.

Hvis den siste søylen ikke er pivot så:

(i) Hvis alle de andre søylene er pivot, har vi en entydig løsning.

(ii) Ellers er det uendelig mange løsninger.

Har ligningen $A\vec{x}=\vec{b}$ en løsning for alle $\vec{b}$? Radreduserer A til jeg får en matrise C på trappeform.

Hvis alle radene i C inneholder et pivotelement, så har ligningen en løsning for alle $\vec{b}$, hvis ikke finnes det i hvert fall noen $\vec{b}$'er hvor det ikke er løsning.

Ligningen $A\vec{x}=\vec{b}$ har en entydig løsning for alle $\vec{b}$ hvis og bare hvis C har pivotelementer i alle rader og alle søyler; dvs A er en kvadratisk matrise som er ekvivalent med I_n.

Inverse matriser

A: $n\times n$-matrise B er en invers til A dersom

$$AB = BA = I_n$$

Vi har vist at det er nok å sjekke én av likhetene

$$AB=I_n \quad , \quad BA=I_n .$$

Teorem: A er invertibar hvis og bare hvis den reduserte trappeformen er I_n

Metode for å finne invers matrise:

$$[A, I_n] \sim \ldots\ldots \sim [I_n, A^{-1}]$$

Lineærkombinasjoner og baser

$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^n$. $\vec{b}$ er en lin. komb. av $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ dersom det finnes tall $x_1, x_2, \dots, x_m$ slik at

$$\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_m\vec{a}_m$$

Dette er ekvivalent med at $A\vec{x} = \vec{b}$ der

$$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m], \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Spennet til $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ er mengden av alle lin. komb av $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$

$$Sp(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m) = \{x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_m\vec{a}_m : x_1, x_2, \dots, x_m \in \mathbb{R}\}$$

Vi sier at $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ er lin. uavh. dersom alle elementer i $Sp(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m)$ kan skrives som en lin. komb av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ på en entydig måte:

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_m\vec{a}_m = y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 + \dots + y_m\vec{a}_m \Rightarrow x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_m = y_m$$

Ekvivalent: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ er lin. uavhengig dersom

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_m\vec{a}_m = \vec{0} \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0$$

Basis: Vektorene $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ danner en basis for $\mathbb{R}^n$ dersom de lin. uavh. og utspenner hele $\mathbb{R}^n$; dvs at hver eneste vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}$ kan skrives som en lin. komb

$$\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n$$

på en entydig måte

Dette er ekvivalent med at $A\vec{x} = \vec{b}$ har en entydig løsning for alle $\vec{b}$.

Metode for å sjekke om noe er en basis: Undersøk om

(i) trappeformen til A har pivotelementer i alle rader og søyler } ekvivalent.

(ii) den reduserte trappeformen til A er I_n

Determinanter

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} - \cdots$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} a_{i1}A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2}A_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in}A_{in}$$

Regneregler: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, $\det(A^T) = \det(A)$

Hvis A er invertibar, så er $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Teorem: For en $n\times n$-matrise A er følgende ekvivalent

(i) A har redusert trappeform I_n

(ii) A er invertibar

(iii) $A\vec{x} = \vec{b}$ har en entydig løsning for alle $\vec{b}$

(iv) $A\vec{x} = \vec{0}$ har bare løsningen $\vec{x} = \vec{0}$.

(v) Søylene i A utgjør en basis for $\mathbb{R}^n$

(v) $\det(A) \neq 0$

Egenvektorer og egenverdier

A $n \times n$-matrise: $\vec{v}$ er en egenvektor for A dersom $\vec{v} \neq \vec{0}$ og $A\vec{v}$ er parallell med $\vec{v}$, dvs det finnes et tall λ slik at

$$\boxed{A\vec{v} = \lambda \vec{v}}$$

λ kalles da egenverdien til $\vec{v}$.

Hvis du blir bedt om å vise at $\vec{v}$ er en egenvektor for A:

Regn ut $A\vec{v}$ og se om den er parallell med $\vec{v}$.

Standardmetode for å finne egenvektorer og egenverdier:

$$\underbrace{0 = \det(\lambda I_n - A)}_{n\text{-te gradslikning i } \lambda} \Longrightarrow$$

røttene i denne likningen er egenverdiene til A, n røtter (kanskje komplekse, og kanskje med multiplisitet > 1)

Finne egenvektorene til λ_1.

$$A\vec{v}_1 = \lambda \vec{v}_1 \Longrightarrow \text{finner ikke-nulløsninger}$$

Setning: Dersom A har n forskjellige egenverdier, så finnes det alltid en basis av egenvektorer (kan være komplekse)

Spektralteoremet: Dersom A er symmetrisk, er alle egenverdier reelle og det finnes en ortonormal basis av egenvektorer.

Dersom $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ er en basis av egenvektorer for A.

$\vec{x} \in \mathbb{R}^m$, $\quad \vec{x} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_m\vec{v}_m$

$$A^n\vec{x} = a_1\lambda_1^n\vec{v}_1 + a_2\lambda_2^n\vec{v}_2 + \dots + a_m\lambda_m^n\vec{v}_m$$

$$= \lambda_1^n\left[a_1\vec{v}_1 + a_2\underbrace{\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n}_{\downarrow\, 0}\vec{v}_2 + \dots + a_m\underbrace{\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^n}_{\downarrow\, 0}\vec{v}_m\right]$$