Linjeintegraler for vektorfelt (3.4)

En kurve $\mathcal{C}$ som er parametrisert ved $\vec r:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, et vektorfelt $\vec F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$:

$$\int_{\mathcal{C}} \vec F\cdot d\vec r = \int_a^b \vec F(\vec r(t))\cdot \vec r\,'(t)\,dt$$

Motivasjon for notasjon: $d\vec r = \vec r\,'(t)\,dt$

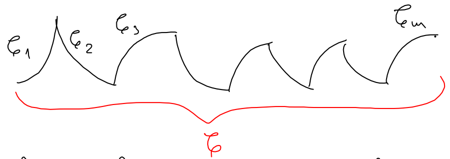
Regneregler:

(i) $\int_{\mathcal{C}} (\vec F + \vec G)\cdot d\vec r = \int_{\mathcal{C}} \vec F\, d\vec r + \int_{\mathcal{C}} \vec G\, d\vec r$

(ii) $\int_{\mathcal{C}} (\vec F - \vec G)\cdot d\vec r = \int_{\mathcal{C}} \vec F\, d\vec r - \int_{\mathcal{C}} \vec G\cdot d\vec r$

(iii) $\int_{\mathcal{C}} a\vec F\cdot d\vec r = a\int_{\mathcal{C}} \vec F\cdot d\vec r$

(iv) Hvis $\mathcal{C}$ deles opp i biter $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_m$



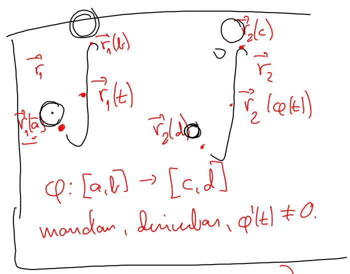
$$\int_{\mathcal{C}} \vec F\cdot d\vec r = \int_{\mathcal{C}_1} \vec F\cdot d\vec r + \int_{\mathcal{C}_2} \vec F\cdot d\vec r + \dots + \int_{\mathcal{C}_m} \vec F\cdot d\vec r$$

Teorem: Anta at $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{C}_2$ er kurver beskrevet ved deriverbare parametriseringer $\vec r_1:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ og $\vec r_2:[c,d]\to\mathbb{R}^n$. Hvis $\vec r_1$ og $\vec r_2$ parametriserer kurvene i samme retning, så er

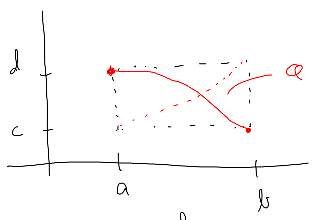
$$\int_{\mathcal{C}_1} \vec F\cdot d\vec r = \int_{\mathcal{C}_2} \vec F\cdot d\vec r .$$

Hvis $\vec r_1$ og $\vec r_2$ parametriserer kurven i motsatt retning, så er

$$\int_{\mathcal{C}_1} \vec F\cdot d\vec r = -\int_{\mathcal{C}_2} \vec F\cdot d\vec r$$



Bevisskisse for motsatt retning:



Innledende regning: $\vec r_1(t) = \vec r_2(\varphi(t))$

Deriver: $\vec r_1\,'(t) = \vec r_2\,'(\varphi(t))\,\varphi'(t)$

$$\int_{\mathcal{C}_1} \vec F\cdot d\vec r = \int_a^b \vec F(\vec r_1(t))\cdot \vec r_1\,'(t)\,dt = \int_a^b \vec F(\vec r_2(\varphi(t)))\cdot \vec r_2\,'(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

$s=\varphi(t)$, $ds=\varphi'(t)\,dt$

$t=a$: $s=\varphi(a)=d$

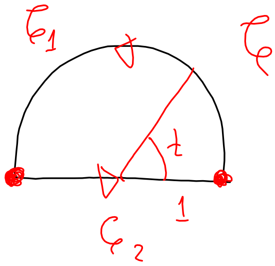
$t=b$: $s=\varphi(b)=c$

$$= \int_d^c \vec F(\vec r_2(s))\cdot \vec r_2\,'(s)\,ds$$

$$= -\int_c^d \vec F(\vec r_2(s))\cdot \vec r_2\,'(s)\,ds = -\int_{\mathcal{C}_2} \vec F\cdot d\vec r .$$

Moral: Det spiller ingen rolle hvilken parametrisering vi bruker bare vi holder styr på retningen.

Eksempel:



$$\vec F(x,y) = xy\vec i + e^{y}\vec j$$

$$\int_C \vec F\cdot d\vec r$$

$$\int_C \vec F\cdot d\vec r = \underline{\int_{C_1} \vec F\cdot d\vec r} + \underline{\int_{C_2} \vec F\cdot d\vec r}$$

$$\vec r_1 = \overbrace{\cos t}^{x(t)}\,\vec i + \overbrace{\sin t}^{y(t)}\,\vec j, \quad t\in[0,\pi]$$

$$\vec r_2(t) = t\,\vec i, \quad t\in[-1,1]$$

$$\int_{C_1} \vec F\cdot d\vec r = \int_0^{\pi} (\cos t\sin t\,\vec i + e^{\sin t})\cdot(-\sin t\,\vec i + \cos t\,\vec j)\,dt$$

$$\vec r_1{}'(t) = -\sin t\,\vec i + \cos t\,\vec j$$

$$= \int_0^{\pi} [-\sin^2 t\cos t + e^{\sin t}\cos t]\,dt$$

$$u = \sin t, \quad du = \cos t\,dt$$

$$t = 0, \quad u = \sin 0 = 0$$

$$t = \pi, \quad u = \sin\pi = 0$$

$$= \int_0^0 [-u^2 + e^u]\,du = \underline{\underline{0}}$$

$$\vec F(x,y) = \overset{t}{x}\overset{0}{y}\,\vec i + e^{\overset{0}{y}}\,\vec j$$

$$\vec r_2(t) = t\,\vec i \qquad t\in[-1,1]$$

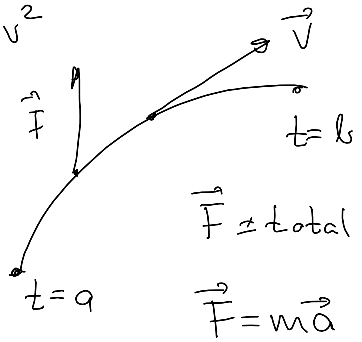
$$\underline{\vec r_2{}'(t) = \vec i}$$

$$\int_{C_2} F\cdot d\vec r = \int_{-1}^{1} (t\cdot 0\,\vec i + e^0\,\vec j)\cdot\vec i\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1} (0 + 0)\,dt = \underline{\underline{0}}.$$

Konklusjon: $\int_C \vec F\cdot d\vec r = \int_{C_1} \vec F\cdot d\vec r + \int_{C_2} \vec F\cdot d\vec r = 0 + 0 = \underline{\underline{0}}$

Eksempel: **Kinetisk energi:** $E_k = \frac{1}{2}mv^2$



$\vec F$ = total kraft

$\vec F = m\vec a$

$$W = \int_{\mathcal{C}} \vec F \cdot d\vec r = \int_a^b \underbrace{m\vec a}_{\vec F} \cdot \underbrace{\vec v(t)\,dt}_{d\vec r}$$

$$= \int_a^b m \frac{1}{2} \left(v(t)^2\right)' dt$$

$$= \frac{1}{2} m \int_a^b \left(v(t)^2\right)' dt$$

$$= \frac{1}{2} m \Big[v(t)^2 \Big]_a^b$$

$$= \frac{1}{2} m v(b)^2 - \frac{1}{2} m v(a)^2 =$$ Endring i kinetisk energi

Mellomregning:

$$v(t)^2 = \vec v(t) \cdot \vec v(t)$$

$$\left(v(t)^2\right)' = \vec a(t) \cdot \vec v(t) + \vec v(t) \cdot \vec a(t) = 2\vec a(t)\vec v(t)$$

$$\vec a(t) \cdot \vec v(t) = \frac{1}{2}\left(v(t)^2\right)'$$

Konservative felt (3.5)

$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, $\vec{F}$ et vektorfelt, $\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Hvis $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, så er $\nabla\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\varphi(x_1, \dots, x_n)$

$\nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)$

Teorem: Hvis $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er en funksjon med kontinuerlige partiellderiverte, og $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ er en stykkevis glatt kurve $\mathcal{C}$, så er

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla\varphi \cdot d\vec{r} = \varphi(\vec{r}(b)) - \varphi(\vec{r}(a))$$

Bevis: Ved kjerneregelen

$$\left(\varphi(\vec{r}(t))\right)' = \nabla\varphi(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)$$

Dermed

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla\varphi \cdot d\vec{r} = \int_a^b \nabla\varphi(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt = \int_a^b \left(\varphi(\vec{r}(t))\right)'\,dt$$

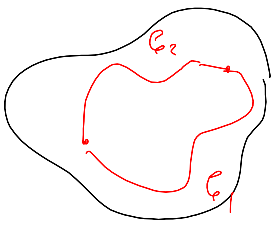
$$= \left[\varphi(\vec{r}(t))\right]_a^b = \varphi(\vec{r}(b)) - \varphi(\vec{r}(a))$$

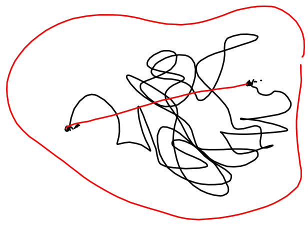
Konsekvenser:

1 Uavhengighet av veien:

$$\int_{\mathcal{C}_1} \nabla\varphi \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \nabla\varphi \cdot d\vec{r}$$

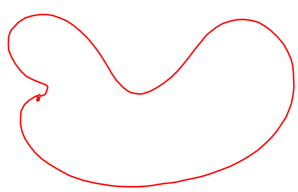
så lenge $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{C}_2$ starter og ender samme sted.





2 Linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} \nabla\varphi \cdot d\vec{r}$ rundt en lukket kurve $\mathcal{C}$ er alltid null.

Samme punkt



$$\int_{\mathcal{C}} \nabla\varphi\, dr = \varphi(\vec{r}(b)) - \varphi(\vec{r}(a)) = 0$$

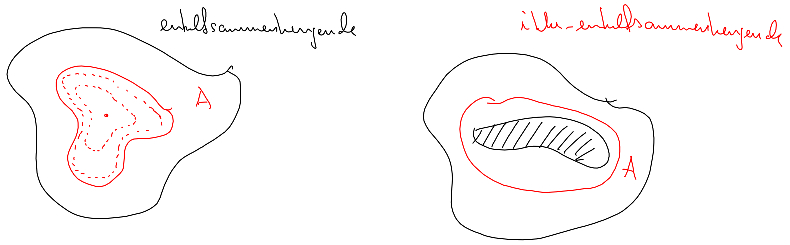
Hvis vi mistenker at et vektorfelt $\vec{F}$ kan være en gradient, hvordan sjekker vi mistanken?

Definisjon: Anta at $A \subset \mathbb{R}^n$. Vi sier at $\vec{F}$ er konservativt i A dersom det finnes en funksjon φ slik at

$$\vec{F}(\vec{x}) = \nabla\varphi(\vec{x}) \quad \text{for alle } x \in A.$$

Vi kaller φ en potensialfunksjon for $\vec{F}$ i A.

Området A kalles enkeltsammenhengende dersom enhver lukket kurve i A kan trekkes sammen til et punkt i A uten å forlate A.



Teorem: Anta at $\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ har kontinuerlige deriverte og la A være et område i $\mathbb{R}^n$.

(i) Dersom $\vec{F}$ er konservativt på A, så er

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\vec{x}) \quad \text{for alle } \vec{x} \in A \text{ og alle } i,j.$$

(ii) Dersom A er enkeltsammenhengende og

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\vec{x}) \quad \text{for alle } \vec{x} \in A \text{ og alle } i,j$$

så er $\vec{F}$ konservativt på A.

I praksis: Dersom $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ alltid holder i A, så er det håp om at $\vec{F}$ er konservativt, men sikker kan man bare være dersom A er enkeltsammenhengende.

Eksempel: $\vec{F}(x,y) = \overbrace{(3x^2y^2 + 2x)}^{F_1}\vec{i} + \overbrace{(2x^3y + 3y^2)}^{F_2}\vec{j}$ i $\mathbb{R}^2$

Er dette konservativt?

Sjekker om: $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$

$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 6x^2y \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 6x^2y$ Like!

Siden $\mathbb{R}^2$ er enkeltsammenhengende, betyr dette at $\vec{F}$ er konservativt.

$\vec{F} = \nabla\varphi$, hva er φ? $\qquad \vec{F}(x) = (F_1(x), F_2(x))$

Må ha $\qquad \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 3x^2y^2 + 2x \Rightarrow \varphi(x,y) = x^3y^2 + x^2 + \underbrace{C(y)}_{y^3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2x^3y + 3y^2 \Rightarrow \varphi(x,y) = x^3y^2 + y^3 + \underbrace{K(x)}_{x^2}$$

$$\varphi(x,y) = x^3y^2 + x^2 + y^3 + 17$$