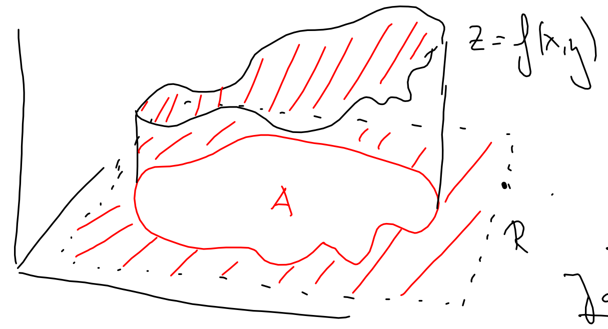
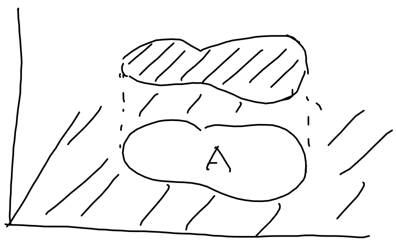
Integrabilitet (6.6)

Hvis R er et rektangel og $f: R \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon, så vet vi at f er integrerbar over R.



Hva skjer om vi integrerer over et mer komplisert område A?



Definisjon: Vi sier at A er Jordan-målbar dersom $\mathbb{1}_A$ er integrerbar.

$$\mathbb{1}_A(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } (x,y) \in A \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Setning: Anta at $A \subset \mathbb{R}^2$ er en begrenset, lukket, Jordan-målbar mengde. Da er enhver kontinuerlig $f: A \to \mathbb{R}$ integrerbar over A, dvs at integralet $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ finnes. Områder av type I og type II er integrerbare.

Skifte av variable i dobbeltintegraler (6.7)

Skifte av variabel i vanlige integraler:

$$\int_a^b f(g(x))\,dx \qquad u = g(x) \Rightarrow x = h(u), \ \boxed{dx = h'(u)\,du}$$

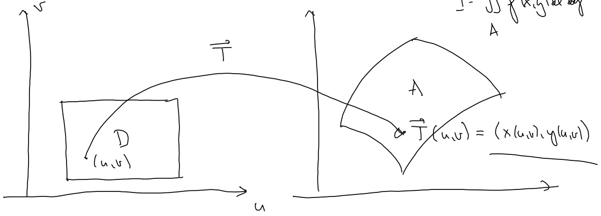
Grenser: $x = a: \ u = g(a)$
$x = b: \ u = g(b)$

nytt integrasjonsområde:

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\underbrace{h'(u)}_{\text{ekstrafaktor}}\,du = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\underbrace{\frac{dx}{du}}_{\text{ekstrafaktor.}}\,du$$

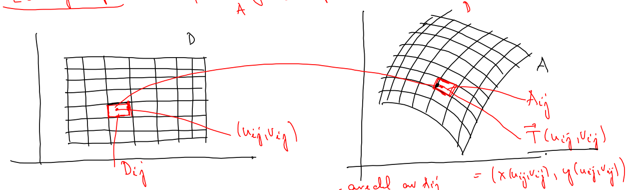
Skifte av variable i dobbeltintegraler

$$I = \iint_A f(x,y)\,dx\,dy$$



$$g(u,v) = f(\vec{T}(u,v)) = f(x(u,v), y(u,v))$$

Lønnlig håp: Vanskelige $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ kan være med $\iint_D g(u,v)\overbrace{\,}^{\text{straffefaktor.}}du\,dv$ å gjøre?



$= (x(u_{ij},v_{ij}), y(u_{ij},v_{ij}))$

arealet av A_{ij}

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \approx \sum f(T(u_{ij},v_{ij}))\,|A_{ij}|$$

Har at
$$|A_{ij}| \approx |D_{ij}|\,\underbrace{|\det T'(u,v)|}_{\text{Forstørrelses-faktor}}$$

$$= \sum g(u_{ij},v_{ij})\,|A_{ij}| \approx$$

$$= \sum \underbrace{g(u_{ij},v_{ij})\,|\det T'(u_{ij},v_{ij})|}_{\text{Riemann-sum}}\overbrace{(u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1})}^{|D_{ij}|}$$

$$\rightarrow \iint_D g(u,v)\,\underbrace{|\det T'(u,v)|}_{\text{pris.}}\,du\,dv$$

$$= \iint_D f(x(u,v), y(u,v))\,|\det T'(u,v)|\,du\,dv$$

Hva er $\det T'(u,v)$: $\quad \vec{T}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}, \quad \vec{T}'(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$

$$= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

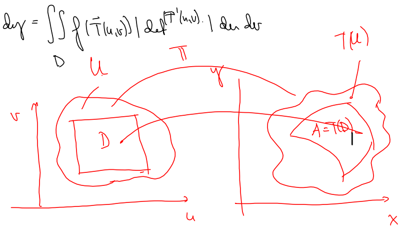
Skrivemåte: $\det \vec{T}'(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$

Dermed: $$\underbrace{\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D}_{\text{skifte av området}} f(x(u,v), y(u,v))\,\underbrace{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|}_{\text{pris å betale: ekstra faktor.}}\,du\,dv$$

Teorem: La U være en åpen mengde i $\mathbb{R}^2$ og anta at $T: U \to \mathbb{R}^2$ er en injektiv funksjon med kontinuerlige partiellderiverte. Dersom D er en lukket, Jordan-målbar delmengde av U, og $f: D \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon, så er

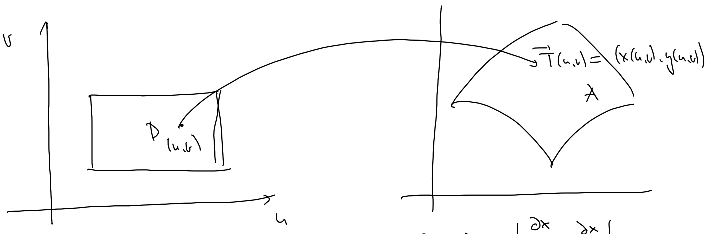
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(\vec{T}(u,v))\,|\det \vec{T}'(u,v)|\,du\,dv$$

der $A = T(D)$.



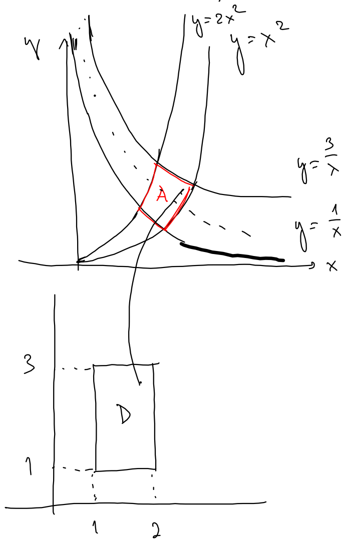
Oppsummering:

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$



$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Eksempel: $\iint_A x y^2\,dx\,dy$ der A er området i første kvadrant avgrenset av kurvene $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{3}{x}$



Kan vi skifte variable slik at vi får et penere område å integrere over (helst et rektangel)

$\frac{y}{x^2} = 1$, $\frac{y}{x^2} = 2$ $\quad \boxed{1 \le \frac{y}{x^2} \le 2}$

$xy = 1$, $xy = 3$ $\quad \boxed{1 \le xy \le 3}$

Vi innfører nye variable $\boxed{u = \frac{y}{x^2},\ v = xy}$

Når $1 \le u \le 2$ og $1 \le v \le 3$, vil $(x,y) \in A$.

Må finne x og y uttrykt ved u, v, dvs. løse ligningssystemet $u = \frac{y}{x^2}, v = xy$ m.h.p. x, y.

Deler: $\frac{v}{u} = \frac{x\cancel{y}}{\frac{\cancel{y}}{x^2}} = \frac{x \cdot x^2}{\frac{1}{x^2}\cdot x^2} = x^3$

$$x = \sqrt[3]{\frac{v}{u}} = \frac{\sqrt[3]{v}}{\sqrt[3]{u}} = v^{1/3} u^{-1/3} = u^{-1/3} v^{1/3}$$

$$y = x^2 u = u^{-2/3} v^{2/3} \cdot u = u^{1/3} v^{2/3}$$

HUSK:
2 = TO
3 = TRE

Jacobi-determinanten:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} u^{-4/3} v^{1/3} & \frac{1}{3} u^{-1/3} v^{-2/3} \\ \frac{1}{3} u^{-2/3} v^{2/3} & \frac{2}{3} u^{1/3} v^{-1/3} \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{2}{9} u^{-1} - \frac{1}{9} u^{-1} = -\frac{1}{3} u^{-1}$$

Dette gir:

$$\iint_A x y^2\,dx\,dy = \iint_D x(u,v)\, y(u,v)^2 \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv =$$

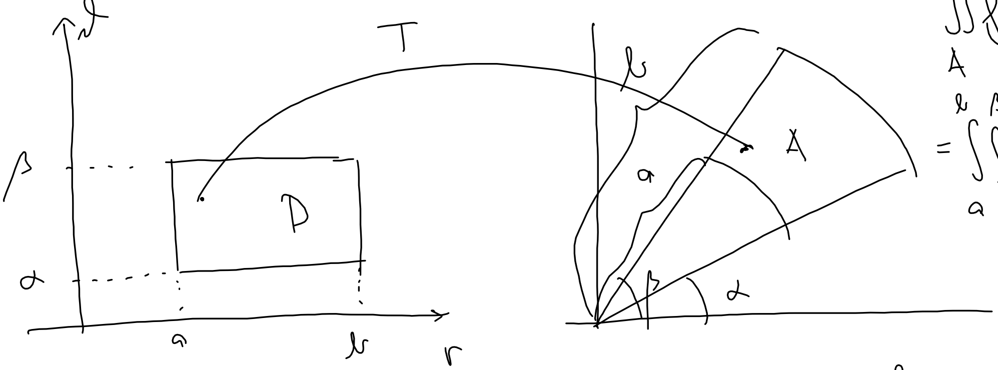
$$= \iint_D u^{-1/3} v^{1/3} (u^{1/3} v^{2/3})^2 \frac{1}{3} u^{-1}\,du\,dv$$

$u^{-1/3} u^{2/3} u^{-1} = u^{-2/3}$

$v^{1/3} v^{4/3} = v^{5/3}$

$$= \frac{1}{3}\int_1^3 \left[\int_1^2 u^{-2/3} v^{5/3}\,du\right] dv = \ldots\ldots\ldots$$

Sammenheng med polarkoordinater



$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_\alpha^\beta f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,d\theta\,dr$$

$x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\underbrace{\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|}_{r}\,dr\,d\theta$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$