Kapittel 5

Kompletthet av $\mathbb{R}^m$: Enhver Cauchy-følge i $\mathbb{R}$ konvergerer

Bolzano-Weierstrass' teorem: Enhver begrenset følge i $\mathbb{R}^m$ har en konvergent delfølge.

Iterasjon: $\vec{F}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^m$, $\vec{x}_1 = \vec{F}(\vec{x}_0)$, $\vec{x}_2 = \vec{F}(x_1), \dots$, $\vec{x}_{n+1} = \vec{F}(\vec{x}_n), \dots$

Fikspunkt: $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{x}$

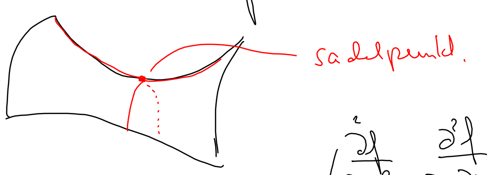
Banachs fikspunktteorem: Anta at A er en lukket delmengde av $\mathbb{R}^m$ og at $\vec{F}: A \to A$ er en kontraksjon. Da har $\vec{F}$ et entydig fikspunkt $x \in A$, og uansett hvilket startpunkt $\vec{x}_0 \in A$ vi velger, så vil følgen $\vec{x}_0, \vec{x}_1 = \vec{F}(\vec{x}_0), \vec{x}_2 = \vec{F}(x_1), \dots$ konvergere mot x.

Optimering

Ekstremalverdisetning: En kontinuerlig $f: K \to \mathbb{R}$ definert på en lukket og begrenset delmengde K av $\mathbb{R}^m$ har alltid maksimums- og minimumspunkter.

Hvis $f: A \to \mathbb{R}$, og $\vec{a}$ er et indre punkt i A, så kalles $\vec{a}$ et stasjonært punkt dersom $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{a}) = 0$ for alle i, med andre ord hvis

$$Df(\bar{a}) = 0$$



Hesse-matrise:

$$Hf(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Symmetrisk-matrise, har n reelle egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

Annenderiverttesten: Anta at $\bar{a}$ er et stasjonært punkt for f og at f har kontinuerlige annenderivert. Da gjelder

(i) Dersom alle egenverdiene er (strengt) positive, så er $\bar{a}$ et lokalt minimum.

(ii) ——"—— negative, så er $\bar{a}$ et lokalt maksimum.

(iii) Dersom noen egenverdier er positive og andre negative, så er $\bar{a}$ et sadelpunkt.

(iv) Dersom noen egenverdier er null og resten har samme fortegn, så gir testen ingen konklusjon

Annenderiverttesten i to variable: Anta at $\bar{a}$ er et stasjonært punkt for $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ og sett

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{a}), \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(\bar{a})$$

$$D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \qquad D = \lambda_1 \lambda_2$$

Da gjelder:

(i) $D < 0$ så er $\bar{a}$ et sadelpunkt

(ii) $D > 0$ og $A > 0$, så er $\bar{a}$ et lokalt minimum.

(iii) $D > 0$ og $A < 0$, så er $\bar{a}$ et lokalt maksimum.

(iv) Hvis $D = 0$, så gir testen ingen konklusjon.

Lagranges multiplikatormetode

Max/min: $f(\vec{x})$ under bibetingelsen $g(\vec{x}) = b$.

To betingelser:

(i) $\nabla g(\bar{x}) = 0$

(ii) $\nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla g(\bar{x})$

Ser nærmere på (ii):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(\bar{x}) \\
\frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{x}) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}) \\
&\vdots \\
\frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(\bar{x}) \\
g(\vec{x}) &= b
\end{aligned}\right\}$$

n+1 ligninger og n+1 ukjente.

Flere bibetingelser: Maks/min $f(\bar{x})$ under bibetingelsen $g_1(\bar{x}) = b_1, \ldots, g_m(\bar{x}) = b_m$

To tilfeller:

(i) $\nabla g_1(x_1), \ldots, \nabla g_m(x)$ er lineært uavhengige

(ii) $\nabla f(\bar{x}) = \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}) + \lambda_2 \nabla g_2(\bar{x}) + \cdots + \lambda_m \nabla g_m(\bar{x})$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) &= \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\bar{x}) + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_m \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\bar{x}) \\
&\vdots \\
\frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) &= \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\bar{x}) + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(\bar{x}) + \cdots + \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\bar{x} \\
g_1(\bar{x}) &= b_1 \\
&\vdots \\
g_m(\bar{x}) &= b_m
\end{aligned}\right\}$$

n+m ligninger med n+m ukjente.

Rekker

En rekke kan konvergere på to måter:

(i) Den kan konvergere absolutt: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergerer — alle tester om positive rekker kan brukes

(ii) Den kan konvergere betinget: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergerer, men $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ divergerer — Håper at testen for alternerende rekker kan brukes: En alternerende rekke der størrelsen til leddene avtar mot null, er konvergent.

Tester for positive rekker:

Forholdstesten/rottesten:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$$

1 Hvis $\rho < 1$, så konvergerer rekken.

2 Hvis $\rho > 1$, så divergerer rekken.

3 Hvis $\rho = 1$, gir testen ingen konklusjon.

Grensesammenligningskriteriet: Anta at $\sum a_n$ (kjente eksempler) og $\sum b_n$ (vil teste) er to rekker med positive ledd.

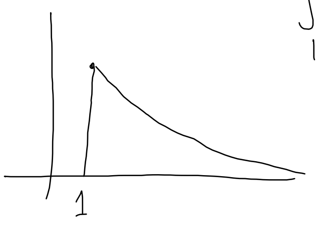
(i) Dersom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer og $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} < \infty$, da konvergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(ii) Dersom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer og $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} > 0$, da divergerer $\sum b_n$ også.

Typiske rekker å sammenligne med: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} \text{konvergerer for } p>1 \\ \text{divergerer for } p \le 1. \end{cases}$

Integraltesten: Anta at $f: [1,\infty) \to \mathbb{R}$ er en positiv, avtagende funksjon. Da konvergerer rekken $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ hvis og bare hvis

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ konvergerer.}$$



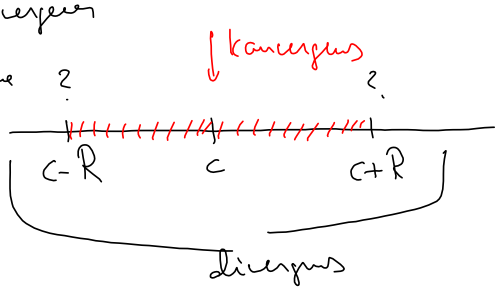
Potensrekker

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots + a_n(x-c)^n + \dots$$

Tre muligheter

(i) Bare konvergens for $x = c$ $R = 0$

(ii) Det finnes et tall R (konvergensradien) slik at rekken konvergerer når $|x-c| < R$ og divergerer $|x-c| > R$. Konvergens i endepunktene varierer.



(iii) Rekken konvergerer for alle x.

$R = \infty$

Hvordan finner man denne R'en?

Bruk forholdstest $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-c)^{n+1}}{a_n(x-c)^n} \right|$ < 1 konv., > 1 div.

rottesten $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|}$ < 1, > 1

For å finne konvergensområdet, må u opp å sjekke endepunktene:

Må bruke < grensesammenligningskriteriet / integraltesten. alternerende rekker.

Finne summen til potensrekker

Derivasjon av rekker:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}$$

Samme konvergensradius, kan miste konvergens i endepunkter.

Integrasjon av rekker:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$
$$\int_c^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$$

Samme konvergensradius, men kan tjene konvergens i et endepunkt.

Eksempel:

$$\frac{1}{\underbrace{1+x}_{1-(-x)}} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \qquad |x|<1$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad (-1,1]$$

Abels teorem: En potensrekke er kontinuerlig i hele sitt konvergensområde.

Taylorrekker

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \text{forutsatt } R_n(x) \to 0 \quad n \to \infty.$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \cdots \quad \text{alle } x.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

for alle x.

Substitusjonsteknikk:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots \quad \text{for alle } x$$

$x = -u^2$

$$e^{-u^2} = 1 - u^2 + \frac{u^4}{2} - \frac{u^6}{6} + \cdots$$