Implisitte funksjoner

$f(x_1,..,x_m,y)=0$ løser for y: $y=g(x_1,x_2,..,x_m)$

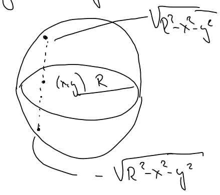
Funksjonen y er gitt implisitt ved ligningen $f(x_1,..,x_m,y)=0$

Eksempel: $x^2+y^2+z^2-R^2=0$

$$\Downarrow$$

$$z^2=R^2-x^2-y^2$$

$$z=\begin{cases}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\\ -\sqrt{R^2-x^2-y^2}\end{cases}$$



Implisitt funksjonsteorem: Anta at U er en åpen mengde i $\mathbb{R}^{m+1}$ og at $f: U\to\mathbb{R}$ er en funksjon med kontinuerlige partiell deriverte. Anta at $(\vec{x}_0,y_0)$ er et punkt i U slik at $f(\vec{x}_0,y_0)=0$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}_0,y_0)\neq 0$. Da finnes det en omegn U_0 om $\vec{x}_0$ og en deriverbar funksjon $g: U_0\to\mathbb{R}$ slik at $f(\vec{x},g(x))=0$ for alle $x\in U_0$. Videre er

$$(*)\qquad \frac{\partial g}{\partial x_i}(\vec{x})=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x},g(\vec{x}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x},g(\vec{x}))}$$

Bevis for $(*)$ forutsatt resten av teoremet.

$$f(x_1,x_2,..,x_m,g(x_1,x_2,..,x_m))=0$$

Deriverer m.h.p. x_i:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f(x_1,x_2,..,x_i,..,x_m,g(x_1,x_2,..,x_i,..,x_m))\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x_i}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x_i}=-\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial x_i}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial y}}}$$

Implisitt derivasjon i praksis:

$$x^2+y^2+z^2-R^2=0 \qquad z(x,y)=g(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}: \qquad \frac{\partial z}{\partial x}$$

$$2x+0+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-0=0$$

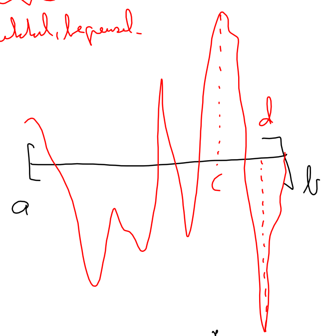
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x}{2z}=-\frac{x}{z}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}: \qquad 0+2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}-0=0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$$

Ekstremalverdisetningen

MAT 1100: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ kontinuerlig har maks og min. punkter.

$[a,b]$: lukket, begrenset.



$f(d)\le f(x)\le f(c)$

for alle $[a,b]$

Ekstremalverdisetningen: La A være en ikke-tom, lukket, begrenset delmengde av $\mathbb{R}^m$ og anta at $f:A\to\mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon. Da har f maksimal- og minimalpunkter, dvs det finnes $c, d\in A$ slik at for alle $x\in A$ er

$$f(d)\le f(x)\le f(c).$$

Spesielt er f begrenset.

Bevis for maksimaldelen: La

$$M=\sup\{f(\vec{x}): \vec{x}\in A\}$$

(der $M=\infty$ hvis f er ubegrenset oppad)

Velg en følge $\{\vec{x}_n\}$ i A slik at $f(\vec{x}_n)\to M$. Ifølge Bolzano-Weierstrass har $\{\vec{x}_n\}$ en konvergent delfølge $\{\vec{x}_{n_k}\}$ og siden A er lukket, må grensen $\vec{x}$ ligge i A. Dermed har vi på den ene siden:

$$f(\vec{x}_{n_k})\longrightarrow f(\vec{x}) \quad \text{siden } f \text{ kont.}$$

og på den andre

$$f(\vec{x}_{n_k})\to M.$$

Dette betyr at $f(\vec{x})=M$, og følgelig er $\vec{x}=\vec{c}$ et maksimalpunkt.

Tirsdag: Hvordan finner man disse maks- og min-punktene.