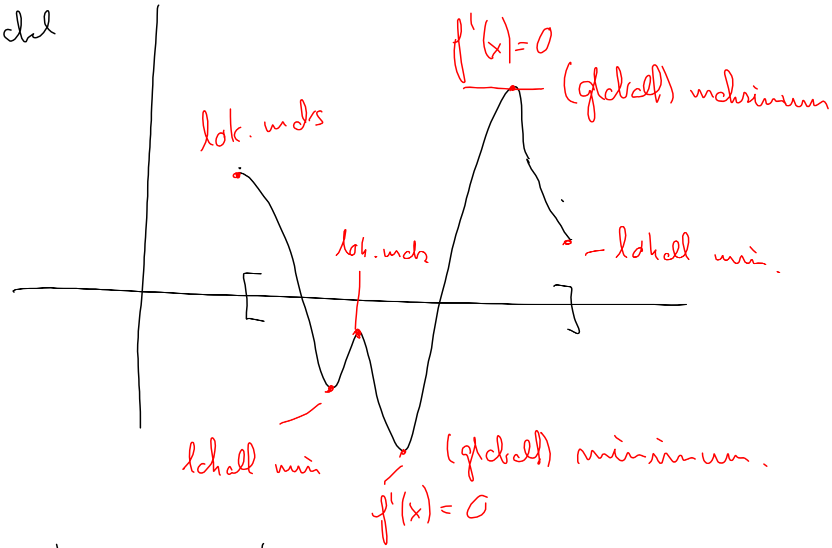
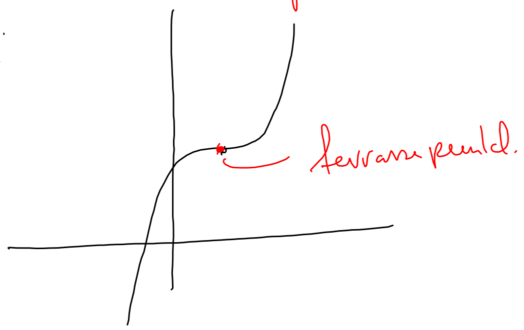
Maks. og min. problemer for funksjoner av flere variable

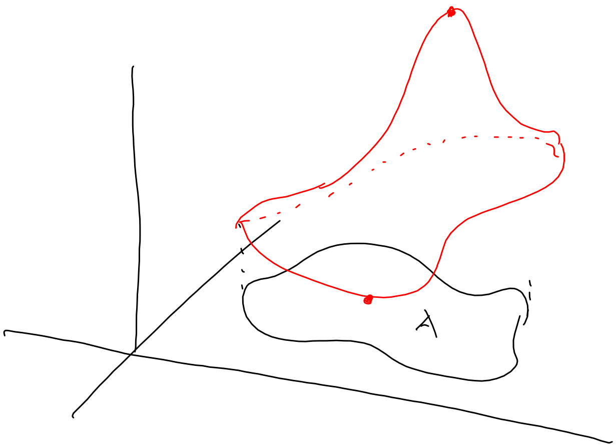
Én variabel



Faremoment.



Flere variable: $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $f: A \to \mathbb{R}$, f deriverbar i alle indre punkter



Dersom f har et lokalt maksimum eller minimum i et indre punkt $\vec{a}$, så er alle partiellderiverte

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = 0, \text{ dvs}$$

$$\nabla f(\vec{a}) = 0.$$

Konklusjon: Lokale maks og min punkter finnes

(i) der $\nabla f(\vec{a}) = 0$

(ii) på randen til A.

Eksempel: Finn mulige maks. og min.-punkter for funksjonen

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y \,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 1$$

Ligningssystem:

$$2x - 2y = 0 \Longrightarrow y = \frac{1}{2}$$
$$-2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Potensielt ekstremalpunkt. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

For å finne ut hva slags punkt dette er, prøver vi å få oversikt over verdiene nær dette punktet. Sett:

$$x = \frac{1}{2} + x' \,, \quad y = \frac{1}{2} + y' \,, \quad f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

$$f(x,y) = x^2 - 2xy + y = \left(\frac{1}{2} + x'\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2} + x'\right)\left(\frac{1}{2} + y'\right) + \frac{1}{2} + y'$$
$$= \frac{1}{4} + x' + x'^2 - 2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2}x' + x'y'\right) + \frac{1}{2} + y'$$
$$= \frac{1}{4} + \cancel{x'} + x'^2 - \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{y'} - \cancel{x'} - 2x'y' + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{y'}$$
$$= \frac{1}{4} + x'^2 - 2x'y'$$

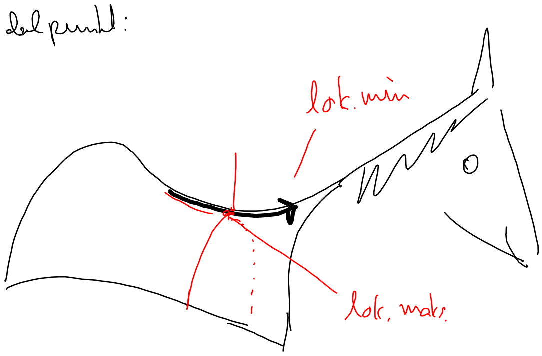
– er dette større enn eller mindre enn $\frac{1}{4}$ når x' og y' er små?

Det kommer an på: Hvis y', så får $\frac{1}{4} + x'^2 > \frac{1}{4}$

Hvis $x' = y'$, så får vi $\frac{1}{4} + x'^2 - 2x_1^2 = \frac{1}{4} - x_1^2 < \frac{1}{4}$

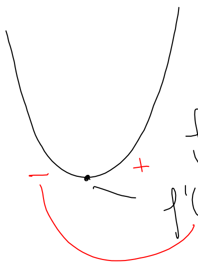
Konklusjon: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ er hverken lok. maks. eller lok. min.

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ er et sadelpunkt:



Vi er på jakt etter en metode for å finne ut om et punkt der $\nabla f(\vec{a}) = 0$ er et
- lokalt maks
- lokalt min
- sadelpunkt

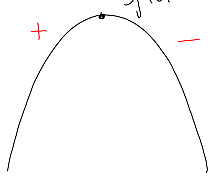
Annenderiverttesten for funksjoner av én variabel:



$f''(a) > 0 \Rightarrow$ lok. min.

$f'(a) = 0$

$f''(a) = 0 \Rightarrow$ ingen konklusjon



$f'(a) = 0$

$f''(a) < 0 \Rightarrow$ lok. maks

Funksjoner av flere variable: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a})$

Hesse-matrisen:

$$Hf(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Vet at $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a}) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{a})$, så $Hf(\vec{a})$ er symmetrisk.

Det finnes derfor en ortonormal basis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ av egenvektorer med reelle egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \begin{cases} 0 & \text{når } i \neq j \\ 1 & \text{når } i = j. \end{cases}$$

Annenderiverttesten for funksjoner av flere variable:

Anta $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$. Da gjelder:

(i) Dersom alle egenverdiene til $Hf(\vec{a})$ er positive, så er $\vec{a}$ et lokalt minimum.

(ii) Dersom alle egenverdiene er negative, så er $\vec{a}$ et lokalt maksimum.

(iii) Dersom noen egenverdier er positive og andre negative, så er $\vec{a}$ et sadelpunkt.

(iv) Dersom noen av egenverdiene er null og resten har samme fortegn, så gir ikke testen noen konklusjon.

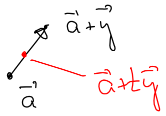
Minner om kjerneregelen: $g(t) = f(\vec r(t))$

$$g'(t) = \nabla f(\vec r(t))\cdot \vec r\,'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot x_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot x_2'(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} x_n'(t)$$

Vet $\nabla f(\vec a) = \vec 0$? Vil undersøke om $\vec a$ er lok maks, lok min. eller sadelpunkt.

$$f(\vec a + \vec y) - f(\vec a) \begin{cases} \geq 0 & \text{hvis } \vec a \text{ lok min.} \\ \leq 0 & \text{hvis } \vec a \text{ lok. maks} \end{cases}$$

noen ganger pos, noen neg. hvis $\vec a$ sadelpunkt.



Definer: $g(t) = f(\overbrace{\vec a + t\vec y}^{\vec r(t)})$

$$g'(t) = \nabla f(\vec a + t\vec y)\cdot \vec y = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec a + t\vec y)y_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec a + t\vec y)y_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec a + t\vec y)y_n$$

$$g''(t) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec a + t\vec y)y_i y_j$$

Taylors formel: $g(1) = g(0) + g'(0)1 + \frac{1}{2}g''(c)\cdot 1^2$

$$f(\vec a + \vec y) = f(\vec a) + \underbrace{\nabla f(\vec a)}_{0}\cdot \vec y + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec a + c\vec y)y_i y_j$$

$$f(\vec a + \vec y) \approx f(\vec a) + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec a)y_i y_j}$$

$$f(\vec a + \vec y) \approx f(\vec a) + \frac{1}{2}(Hf(\vec a)\vec y)\cdot \vec y$$

pos eller negativ

$\vec y = c_1\vec v_1 + c_2\vec v_2 + \dots + c_n\vec v_n$

$\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n$

$$= f(\vec a) + \frac{1}{2}(c_1\lambda_1\vec v_1 + c_2\lambda_2\vec v_2 + \dots + c_n\lambda_n\vec v_n)\cdot(c_1\vec v_1 + c_2\vec v_2 + \dots + c_n\vec v_n)$$

$$= f(\vec a) + \frac{1}{2}(c_1^2\lambda_1 + c_2^2\lambda_2 + \dots + c_n^2\lambda_n)$$

– pos. eller negativ.

Hvis alle λ-ene er positive, så $f(\vec a + \vec y) \geq f(\vec a)$ uansett hva y måtte være $\Rightarrow$ a lok. min.

Hvis alle λ-ene er negative, så er $f(\vec a + \vec y) \leq f(\vec a)$ uansett $\vec y$, så $\vec a$ lok. maks.

Hvis med noen pos. noen negative λ'er $\Rightarrow$ både $f(\vec a + \vec y) \geq f(\vec a)$, $f(\vec a + \vec y) \leq f(\vec a)$

$\Rightarrow$ sadelpunkt

Annenderiverttesten for funksjoner av to variable:

Anta $\nabla f(\bar{a}) = 0$. La

$$Hf(\bar{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\bar{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

og $D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ Da gjelder

(i) Hvis $D < 0$, så er $\bar{a}$ et sadelpunkt.

(ii) Hvis $D > 0$, så er

(a) $\vec{a}$ er lokalt minimum dersom $A > 0$

(b) $\bar{a}$ er lokalt maksimum dersom $A < 0$.

(iii) $D = 0$, så gir testen ingen konklusjon.

Eksempel: $f(x,y) = x^2 - 2xy + y$. $\nabla f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0$

Bruker testen til å avgjøre hva slags punkt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ er.

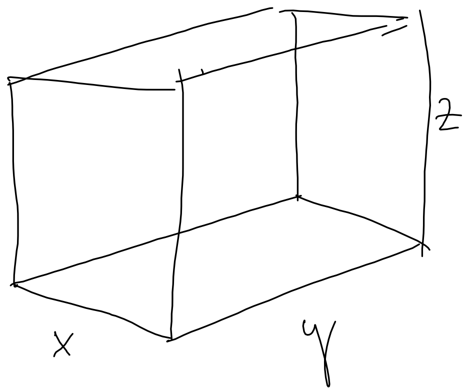
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 1$$

$$A = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2, \quad C = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - (-2)(-2) = \underline{\underline{-4}}$$

Sadelpunkt!

Uoppstilte oppgaver: Lag en kasse uten lokk:



56 m rør.

Finn størst mulig overflateareal.

$$A = xy + 2xz + 2yz$$

$$4x + 4y + 4z = 56$$

$$x + y + z = 14$$

$$z = 14 - x - y$$

$$A(x,y) = xy + 2x(14-x-y) + 2y(14-x-y)$$

$$= xy + 28x - 2x^2 - 2xy + 28y - 2xy - 2y^2$$

$$= 28x + 28y - 3xy - 2x^2 - 2y^2 \qquad \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial A}{\partial y} = 0$$