# Repetisjon

To versjoner av samme problem:

1.
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

2. $A\vec{x} = \vec{b}$, der $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

**Problemet for en spesifikt $\vec{b}$:** Skriv den utvidede matrisen $[A, \vec{b}]$ på trappeform $C$:

(i) Dersom den siste søylen i $C$ er en pivotsøyle $\Rightarrow$ ingen løsning.

**Ellers:**

(ii) Dersom alle de andre er pivotsøyler $\Rightarrow$ entydig løsning.

(iii) Det finnes andre søyler som ikke er pivot $\Rightarrow$ uendelig mange løsninger.

**Problemet for generell $\vec{b}$:** Skriv $A$ på trappeform: $D$

(i) Dersom alle linjene i $D$ har et pivotelement $\Rightarrow$ løsning for alle $\vec{b}$

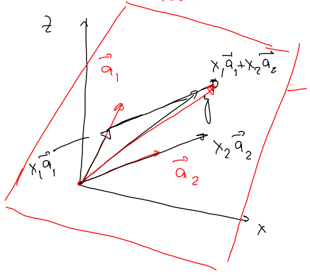
(ii) Dersom vi i tillegg har pivotelementer i alle søyler $\Rightarrow$ entydig løsning for alle $\vec{b}$

Matrisen er kvadratisk, og den reduserte trappeformen er $I_n$.

## Ny versjon

Anta at vi har vektorer $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ i $\mathbb{R}^m$. En vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ kalles en lineærkombinasjon av $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ dersom det finnes tall $x_1, x_2, \dots, x_n$ slik at

$$\underbrace{x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n}_{\text{lin. komb. av } \vec{a}_1,\dots,\vec{a}_n} = \vec{b}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots$$




plan gjennom origo og $\vec{a}_1, \vec{a}_2$

$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2$

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{b} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Dette betyr:

**Teorem:** Anta at $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}$ er vektorer i $\mathbb{R}^m$. Skriv matrisen $[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{b}]$ på trappeform $C$. Da gjelder:

(i) Hvis siste søyle i $C$ er en pivotsøyle, så er $\vec{b}$ ikke en lineærkombinasjon av $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Ellers er:

(ii) Dersom alle de andre søylene i $C$ er pivotsøyler, kan $\vec{b}$ skrives som en lineærkombinasjon

$$\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n$$

på én entydig måte.

(iii) Dersom noen av de andre søylene i $C$ er pivotsøyler, så kan $\vec{b}$ skrives som en lin. komb. av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ på uendelig mange måter.

---

**Teorem.** Anta at $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$. La $A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n]$ og la $D$ være trappeform av $A$. Da gjelder

(i) Dersom $D$ har pivotelementer i alle rader, kan enhver $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ skrives som en lin. komb. av $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. (det betyr at $n \geq m$).

(ii) Dersom $D$ også har pivotelementer i alle søyler, så kan enhver $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ skrives som en lin. komb. av $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ på en entydig måte (dette betyr at $n = m$ og $A \sim I_n$)

Hipp, hurra!

**Definisjon:** Anta at $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$. La

$$Sp(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n) = \{\vec{b} \in \mathbb{R}^m : \vec{b} \text{ er en lin. komb. av } \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$$

Dette kalles spennet til $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$.

---

**Definisjon:** Vi sier at $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ er lineært uavhengige dersom enhver $\vec{b} \in Sp(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ kan skrives som en lin. komb av $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ på en entydig måte

(dvs at $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 + \cdots + y_n\vec{a}_n$, så må $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$)

---

**Setning:** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ er lineært uavhengige hvis og bare hvis følgende gjelder:

(*) Dersom $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = \vec{0}$, så $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$.

**Bevis:** Anta at $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ er lin. uavh.; vi må vise at (*) holder. Hvis

$\vec{0} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n$, så er også $\vec{0} = 0\vec{a}_1 + 0\vec{a}_2 + \cdots + 0\vec{a}_n$,

og siden $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ er lin. uavh., betyr dette at $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$.

Anta så at (*) holder; vi må vise at $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ er lin. uavh. Anta at

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n = y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 + \cdots + y_n\vec{a}_n;$$

vi må vise at $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$. Flytter over

$$(x_1 - y_1)\vec{a}_1 + (x_2 - y_2)\vec{a}_2 + \cdots + (x_n - y_n)\vec{a}_n = \vec{0}$$

Siden (*) holder, er $x_1 - y_1 = 0, x_2 - y_2 = 0, \ldots, x_n - y_n = 0$, dvs $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$.

<u>Spørsmål</u>: Hvordan sjekker man om $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ er lin. uavh.?

Radreduser matrisen $[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n]$ slik at vi får en matrise $D$ på trappeform. Dersom alle søylene i $D$ er pivotsøyler, så er $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ lin. uavh., ellers ikke.

---

<u>Spørsmål</u>: Dersom $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ er lineært avhengige, hvordan plukker vi ut vektorer $\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \ldots, \vec{a}_{i_k}$ som er lin. uavh. og slik at

$$Sp\{\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \ldots, \vec{a}_{i_k}\} = Sp\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$$

<u>Svar</u>: Radreduser $A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n]$ til trappeform.

$$D = [\vec{d}_1, \vec{d}_2, \ldots, \vec{d}_n] \longrightarrow \tilde{D} = [\vec{d}_{i_1}, \vec{d}_{i_2}, \ldots, \vec{d}_{i_k}]$$

hiv ut de søylene som ikke er pivotsøyler.

La $\tilde{A} = [\vec{a}_{i_1}, \vec{a}_{i_2}, \ldots, \vec{a}_{i_k}]$, da er disse søylevektorene lin. uav. og utspenner det samme som $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$.

<u>Definisjon</u>: Vektorene $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ danner en <u>basis</u> for $\mathbb{R}^m$ dersom de er lineært uavhengige og utspenner hele $\mathbb{R}^n$, dvs at enhver vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ kan skrives som en lin. komb.

$$\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n$$

på en entydig.

<u>Eksempel</u>: Standardbasisen for $\mathbb{R}^m$:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \vec{e}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_m\vec{e}_m$$

<u>Spørsmål</u>: Når er $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ en basis for $\mathbb{R}^m$?

Reduser $A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n]$ til trappeform $D$. For at $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ skal utspenne hele $\mathbb{R}^n$, må $D$ ha pivotelementer i alle rader, og skal denne fremstillingen være entydig, må vi ha pivotelementer i alle søyler, dvs $\underline{n = m}$ og pivotelementene står på diagonalen. Den reduserte trappeformen til $A$ er altså $I_n$.

---

<u>Ende et spørsmål</u>: Dersom $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ er lin. uav. men ikke utspenner hele rommet, kan vi da skjøte på

$$\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}, \ldots, \vec{a}_m$$

og få en basis? Og hvis ja, hvordan gjør jeg det?

$$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n] \sim ? \sim ? \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots\ 1 \\ 0 & 0 & \cdots\ 0 \\ 0 & 0 & \cdots\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}, \ldots, \vec{a}_m] \sim \sim \sim \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Nye søyler