Lineære ligningssystemer

Ungdomsskolen:

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 4 \\ x + 2y &= 2 \end{aligned}\right\}$$ to ligninger med to ukjente.

Generell metode:

$-2x - 4y - 2z = -6$

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ 2x - y + 3z &= 4 \\ y - z &= 1 \end{aligned}\right\}$$ 3 lign., 3 ukjente.

$\Updownarrow$

Eliminere ukjente

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ -5y + z &= -2 \\ y - z &= 1 \end{aligned}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ y - z &= 1 \\ -5y + z &= -2 \end{aligned}$$

$5y - 5z = 5$

$\Updownarrow$

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ y - z &= 1 \\ -4z &= 3 \end{aligned}$$

$\Updownarrow$

Trappeform:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ y - z &= 1 \\ z &= -\tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

$x = 3 - 2y - z = 3 - \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = 3 + \frac{1}{4} = \underline{\frac{13}{4}}$

$y = 1 + z = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$z = -\frac{3}{4}$

Operasjoner på ligningssystemet:

1. Bytte om to ligninger
2. Gange en ligning med et tall ulik 0.
3. addere et multiplum av en ligning til en av de andre.

Eksempel:

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 4 \quad \big|\cdot(-1) \quad -x + 2y - z = -4 \\ x + y - z &= 3 \\ 5x - 4y + z &= 18 \quad \cdot(-5):\ -5x + 10y - 5z = -20 \end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 4 \\ 3y - 2z &= -1 \quad \cdot(-2) \quad -6y + 4z = 2 \\ 6y - 4z &= -2 \end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 4 \\ 3y - 2z &= -1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 4 \\ y - \tfrac{2}{3}z &= -\tfrac{1}{3} \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Velge z fritt:

$$y = \frac{2}{3}z - \frac{1}{3}$$

$$x = 4 + 2y - z = 4 + 2\left(\frac{2}{3}z - \frac{1}{3}\right) - z = 4 + \frac{4}{3}z - \frac{2}{3} - z = \frac{1}{3}z + \frac{10}{3}$$

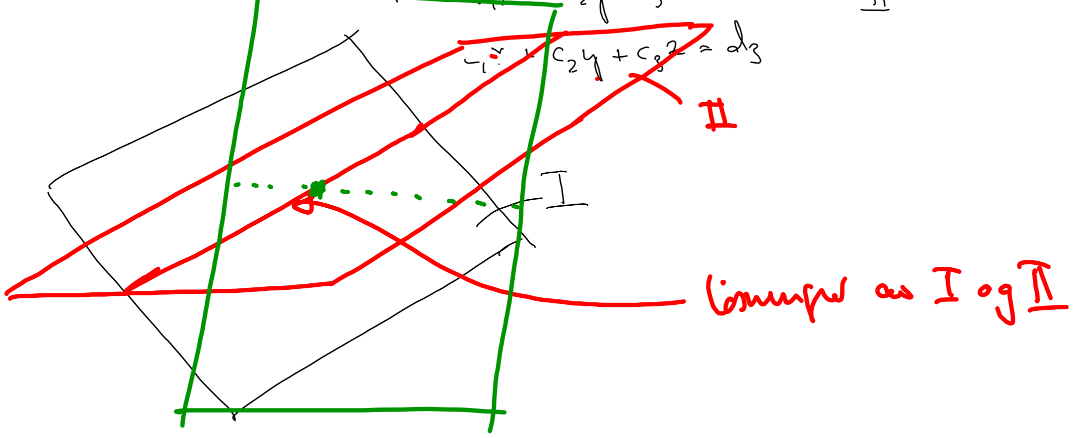
Konklusjon: Uendelig mange løsninger: Vi kan velge z fritt, men må da la

$$y = \frac{2}{3}z - \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{3}z + \frac{10}{3}$$

Geometrisk tolkning:

$$\begin{aligned} a_1x + a_2y + a_3z &= d_1 \quad \leftarrow \mathrm{I} \\ b_1x + b_2y + b_3z &= d_2 \quad \leftarrow \mathrm{II} \\ c_1x + c_2y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$



Matriser

$$\begin{aligned} x-2y+z&=4\\ x+y-z&=3\\ 5x-4y+z&=18 \end{aligned}$$

utvidet matrisen

$$\begin{array}{cccc} -1 & 2 & -1 & -4 \\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & 1 & 18 \end{pmatrix}} \end{array}$$

Rad operasjoner på matrisen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & 1 & 18 \end{pmatrix} \overset{II+(-1)I}{\sim} \begin{array}{cccc} -5 & 10 & -5 & -20 \\ \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 5 & -4 & 1 & 18 \end{pmatrix}} \end{array}$$

$$\overset{III+(-5)I}{\sim} \begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & -4 & -2 \end{pmatrix}} \\ 0 & -6 & 4 & 2 \end{array} \overset{III+(-2)II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{3}II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

tilbake til ligninger

$$\begin{aligned} x-2y+z&=4\\ y-\tfrac{2}{3}z&=-\tfrac{1}{3}\\ 0&=0 \end{aligned}$$

Radoperasjoner på matriser:

(i) Bytte om to rader

(ii) Gange en rad med et tall ulik 0

(iii) Til en rad legge et multiplum av en annen rad.

Trappeform

Intuitivt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definisjon: En matrisen er på trappeform dersom

(i) I enhver rad som ikke bare består av 0'er, er det første ikke-null elementet et ett-tall.

(ii) Enhver rad som ikke bare består av 0'er, har minst en ledende null mer enn linjen over.

Teorem: Enhver matrisen kan føres over på trappeform ved hjelp av en sekvens av radoperasjoner.

Bevisskisse:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & \cdots \\ 0 & 0 & 7 & 5 & 4 & \cdots \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & \cdots \\ 0 & 0 & 7 & 5 & 4 & \cdots \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & \cdots \end{pmatrix}$$

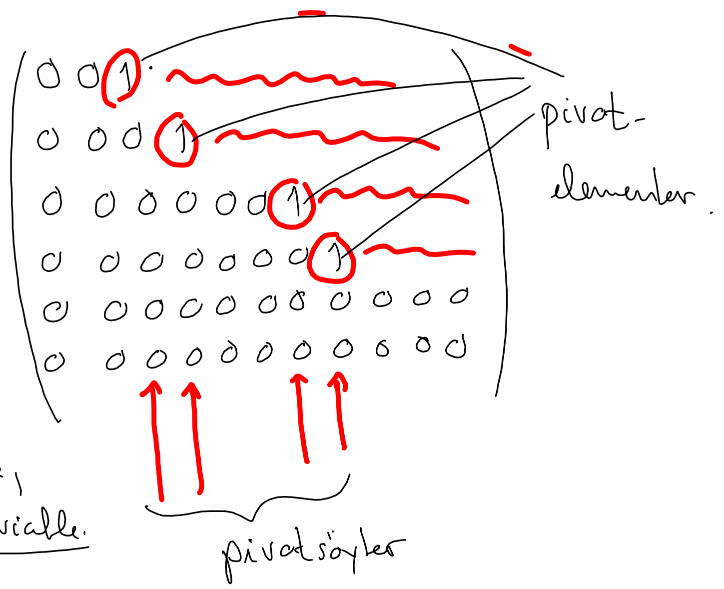
$III + (-7)I$
$IV + (-4)I$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -2 \quad -3 \quad \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

"glemmer"

OSV $\Rightarrow$ trappeform

Matrise på trappeform:



Variablene som tilhører pivotsøyler kalles basisvariable, og de andre kalles frie variable.

Anta at vi har startet med et ligningssystem med ukjent x, y, z, u, v. Radreduserer til

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x + 2y - z + 3u + 4v = 1$$
$$z + 2u - v = 3$$
$$u + 3v = 4$$
$$\cancel{0 = 0}$$
$$\cancel{0 = 0}$$

Velg v fritt.
Regn ut u og z.
Velg y, regn ut x.

Men:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow 0 = 1 \quad \text{Ingen løsning}$$