Lineær uavhengighet

Repetisjon:

Lineærkombinasjon: $\vec{b}$ er en lin. komb. av $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ dersom

$$\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n \quad \text{for } x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

Vi skriver $\vec{b} \in Sp\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ = spennet til $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$.

Lineær uavhengighet: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ er lin. uavh. dersom enhver $\vec{b} \in Sp\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ kan skrives som en lin. komb. av $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ på nøyaktig én måte.

Ekvivalent: $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{0} \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

Tredje måte: Anta at $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ er lin. avhengige. Da finnes det $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, ikke alle lik 0, slik at

$$x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + \overset{0 \atop \neq}{x_i}\vec{a}_i + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{a}_i = -\frac{x_1}{x_i}\vec{a}_1 - \frac{x_2}{x_i}\vec{a}_2 - \dots - \frac{x_n}{x_i}\vec{a}_n$$

Basis: $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^m$ danner en basis for $\mathbb{R}^m$ dersom de er lin. uavh. og utspenner hele $\mathbb{R}^m$, dvs at enhver $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ kan skrives som en lin. komb.

$$\vec{b} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_m\vec{a}_m$$

på entydig måte.

Setning: Anta at $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m \in \mathbb{R}^m$. Anta videre at enten

(i) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ utspenner hele $\mathbb{R}^m$

eller

(ii) $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ er lineært uavhengige.

Da er $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ en basis for $\mathbb{R}^m$.

Bevis: Anta at (i) holder og la D være trappeformen til $A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m]$. Siden alle vektorer kan skrives som lin. komb. av $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$, så har pivotelemente i alle rader. Siden D er kvadratisk, betyr dette at det er et pivotelement i alle søyler, og følgelig er vektorene lin. uavhengige. Altså er $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m$ en basis for $\mathbb{R}^m$.

Anta at (ii) holder og la D være trappeformen til $A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m]$. Siden $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ er lin. uavh., er **alle** søylene i D pivotsøyler, og dermed er det pivotelementer i alle rader, og følgelig kan enhver vektor i $\mathbb{R}^m$ skrives som en lin. komb. av $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$. Dermed er $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_m$ en

Elementærmatrise

Radoperasjoner på identitetsmatriser:

1. Bytte om to rader: $I_4 = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \overset{II \leftrightarrow IV}{\sim} \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}}_{\text{elementær matrise}}$

2. Gang en rad med et tall ulik 0.

$$I_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \overset{7II}{\sim} \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&7&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{\text{elementær matrise}}$$

3. Legg et multiplum av én rad til en annen

$$I_4 = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \overset{II+3III}{\sim} \underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&3&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}}_{\text{elementær matrise}}$$

Definisjon: En elementær matrise er en $n \times n$-matrise som fremkommer ved å utføre én radoperasjon på I_n.

Observasjon: Anta at A er en $m \times n$-matrise, og B er resultatet av å anvende en radoperasjon på A. La E være den tilhørende $m \times m$ elementærmatrisen. Da er

$$B = EA.$$

Hva betyr dette? Hvis D er en trappeform til A, så

$$\underbrace{A \overset{1}{\sim} A_1}\underbrace{\overset{2}{\sim} A_2} \overset{3}{\sim} A_3 \sim \dots \overset{n}{\sim} D.$$

$A_1 = E_1 A \quad A_2 = E_2 A_1 = E_2 E_1 A \quad \dots \quad D = \underbrace{E_n E_{n-1} \cdots E_1} A$

Oppsummering: Hvis D er en trappeform til A, finnes det elementærmatriser $E_1, E_2, \dots, E_n$ slik at $D = E_n E_{n-1} \dots E_1 A$

OBSERVASJON: Alle elementærmatriser er invertible, og den inverse matrisen er også en elementærmatrise.

Hvorfor: Alle $\underbrace{\text{radoperasjoner}}_{\downarrow\ E_1}$ har en $\underbrace{\text{omvendt operasjon}}_{E_2}$.

$$E_1 E_2 = I_n$$

Dermed:

$E_n^{-1} \mid D = E_n E_{n-1} \dots E_1 A$

$E_{n-1}^{-1} \mid E_n^{-1} D = E_{n-1} \dots E_1 A$

$\underbrace{E_{n-1}^{-1} E_n^{-1}} D = E_{n-2} \dots E_1 A$

$\Downarrow$

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_n^{-1} D$$

Setning: Enhver matrise A kan skrives som et produkt

$$A = F_1 F_2 \dots F_n D$$

der $F_1, F_2, \dots, F_n$ er elementærmatriser og D er en trappeform til A. Hvis A er en kvadratisk matrise med redusert trappeform I, så er A lik et produkt av elementære matriser

Determinanter

2x2: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $|A| = \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

3x3: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$|A| = \det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

A en $n\times n$-matrise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{ij} er determinanten vi får når vi stryker det i-te raden og j-te søylen – altså de som går "gjennom" a_{ij}.

Disse A_{ij}-ene kalles "minorer" til A.

Anta at vi allerede vet hvordan vi regner ut $(n-1)\times(n-1)$-determinanter. Da definer determinanten til en $n\times n$-matrise A ved

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} - \cdots + (-1)^{j+1}a_{1j}A_{1j} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}A_{1n}$$

Eksempel: Finn determinanten til

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$+ 3\begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \cdots$$

Setning: Dersom A er en $n\times n$-matrise der en rad eller søyle er 0, så er $\det(A)=0$.

Bevis: La oss se på søyletilfellet: Ser først på $n=2$: $A=\begin{bmatrix}0 & a\\ 0 & b\end{bmatrix}$, $|A| = 0b - a\cdot 0 = 0$

$A=\begin{bmatrix}a & 0\\ b & 0\end{bmatrix}$, $|A| = a\cdot 0 - 0\cdot b = 0$

Induksjonstrinnet: Anta at setningen gjelder for $n-1$, og la A være en $n\times n$-matrise der en søyle er 0:

$$A = \begin{array}{c} \text{j-te søyle} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & 0 & & \\ \vdots & & & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\end{array}$$

$$|A| = a_{11}\underbrace{A_{11}}_{0} - a_{12}\underbrace{A_{12}}_{0}\cdots \pm \underbrace{\overset{a_{ij}}{0}\cdot A_{1j}}_{0} + \cdots + \quad = 0$$

Øvre triangulær: $\begin{pmatrix} a_{11} & \sim & \sim & \sim \\ 0 & a_{22} & \sim & \sim \\ 0 & 0 & \ddots & \sim \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn}\end{pmatrix}$ trappeform.

Nedre triangulær: $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_{22} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & a_{nn}\end{pmatrix}$

Setning: Dersom A er på nedre eller øvre trappeform, så er $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

Bevis (for øvre triangulære):

2×2: $A=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & d\end{pmatrix}$ $|A| = ad - b\cdot 0 = ad$

Induksjonstrinnet: Anta dette holder for $(n-1)\times(n-1)$-matriser.

$n\times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$|A| = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + \cdots \pm a_{1n}A_{1n}$$

$$= a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn}\end{vmatrix}}_{\text{øvre triang}} - \cancel{a_{12}\cdot 0 + a_{13}\cdot 0 + \cdots}$$

$$= \underbrace{a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn}}_{\text{induksjonsantagelsen}}$$

HURRA!