Lineære ligningssystemer

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

lineært ligningssystem med m ligninger og n ukjente.

Matrisen til systemet

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix};$$

Utvidet matrise til systemet:

$$(A, \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Teorem: La C være matrisen vi får når vi omdanner $(A, \vec{b})$ til trappeform. Da gjelder:

(i) Dersom den siste søylen i C er en pivotsøyle, så har ligningssystemet ingen løsninger.

Hvis ikke, så gjelder

(ii) Hvis alle de andre søylene er pivotsøyler, så har systemet en entydig løsning.

(iii) Hvis ikke, så har systemet uendelig mange løsninger (de frie variablene kan velges fritt).

Eksempler:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ingen løsning

pivotelement i siste søyle

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entydig løsning

$$C = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & u & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

ikke pivot

Velg z fritt: uendelig mange løsninger.

<u>Problemstilling</u>: Gitt $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$, når har systemet

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

for alle valg av $b_1, b_2, \dots, b_m$?

<u>Teorem</u>: Skriv (den vanlige) matrisen A til systemet på trappeform: D. Systemet har en løsning for alle høyresider $b_1, b_2, \dots, b_m$ hvis og bare hvis alle rader i D inneholder et pivotelement.

<u>Hvorfor</u>: Anta D har pivotelementer i alle rader

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Velg b'er

$$(A, \vec{b}) \sim \dots\dots\dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 & 4 & \tilde{b}_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \tilde{b}_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \tilde{b}_4 \end{pmatrix}$$

Umulig å få et pivotelement i siste søyle $\Rightarrow$ løsninger finnes.

Anta nå at vi har en rad der det ikke er noe pivotelement

$$A \sim D = \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A, \vec{b}) \sim C = \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kan vi finne en slik $\vec{b}$

Systemet har ingen løsning for denne b'en.

<u>Korollar</u>: Ligningssystemet har en entydig løsning for alle høyresider hvis og bare hvis $m = n$ og pivotelementene til A står på diagonalen.

$$A \sim D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \; 1 \end{pmatrix}$$

<u>Hvorfor</u>: For å ha løsning for alle høyresider, må vi ha pivotelementer i alle rader og for å ha entydige løsninger, må vi ha pivotelementer i alle søyler. Den eneste muligheten er bildet ovenfor.

Redusert trappeform

Definisjon: En matrise er på redusert trappeform dersom den er på trappeform og de eneste ikke-null elementene i pivotsøylene er pivotelementene.

Eksempel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{redusert trappeform}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{trappeform, ikke redusert trappeform}$$

Eksempel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{II}-\mathrm{III}}{\overset{\mathrm{I}-\mathrm{III}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$0 \quad -2 \quad -4 \quad 0$$

$$\overset{\mathrm{I}+(-2)\mathrm{II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{redusert trappeform.}$$

Midtveiseksamen: Opp til og med seksjon 4.4

I MATLAB: rref : reduced row echelon form

Vi har sett at når ligningssystemet har entydig løsning for alle høyresider, så er den reduserte matrisen:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

m=n alle pivotelementer på diagonalen

Redusert trappeform: $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & & \dots & 1 \end{bmatrix}$

Løser et ligningssystem:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde{b}_2 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & & 1 & \tilde{b}_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \tilde{b}_1 \\ x_2 &= \tilde{b}_2 \\ &\vdots \\ x_n &= \tilde{b}_n \end{aligned}$$

Matriseligninger

A er en $m \times n$-matrise

$\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ søylevektor

$\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ søylevektor

$$\underbrace{A}_{m\times n}\underbrace{\vec{x}}_{n\times 1} = \underbrace{\vec{b}}_{m\times 1}$$

Gitt $A, \vec{b}$, finn $\vec{x}$ slik at

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

$$\underbrace{A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\text{kjent}} \qquad \underbrace{\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{vil finne}}$$

slik $A\vec{x} = \vec{b}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}}_{A\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

dvs.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Teorem: La C være resultatet av å radredusere $(A, \vec{b})$ til trappeform. Da gjelder:

(i) Dersom den siste søylen i C er en pivotsøyle, har matriseligningen $A\vec{x} = \vec{b}$ ingen løsning.

Dersom dette ikke er tilfellet, så gjelder:

(ii) Dersom alle de andre søylene i C er pivotsøyler, har $A\vec{x} = \vec{b}$ en entydig løsning.

(iii) Dersom det finnes andre søyler i C som ikke er pivotsøyle, så har $A\vec{x} = \vec{b}$ uendelig mange løsninger.

Teorem: Ligning $A\vec{x}=\vec{b}$ har løsning for alle høyresider $\vec{b}$ hvis og bare hvis alle radene i trappeformen til A er pivotrader. Ligningen har entydig løsning for alle $\vec{b}$'er dersom den reduserte trappeformen til A er I_n

Simultane løsninger av matriseligninger

$$A\vec{x}=\vec{b}_1,\ A\vec{x}=\vec{b}_2,\ \dots,\ A\vec{x}=\vec{b}_k$$

$$(A,\vec{b}_1)\sim \dots\dots \sim (I_n,\tilde{\vec{b}}_1) \Longrightarrow \begin{array}{l} x_1=\tilde{b}_1 \\ x_2=\tilde{b}_2 \\ \vdots \\ x_n=\tilde{b}_n \end{array}$$

$$(A,\vec{b}_2)\sim \dots\dots \sim (I_n,\tilde{\vec{b}}_2) \qquad \begin{array}{l} x_1=\tilde{b}_2 \\ x_2=b \end{array}$$

Effektiv metode:

$$(A,\vec{b}_1,\vec{b}_2,\dots,\vec{b}_k)\sim\dots\sim(I_n,\underset{\vec{x}_1}{\underset{\parallel}{\tilde{b}_1}},\underset{\vec{x}_2}{\underset{\parallel}{\tilde{b}_2}},\dots,\underset{\vec{x}_k}{\underset{\parallel}{\tilde{b}_k}})$$

Hva har dette med inverse matriser å gjøre?

Anta at A har en invers matrise A^{-1}.

$$A^{-1} \,\Big|\, A\vec{x}=\vec{b}$$

$$\left.\begin{array}{c} A^{-1}(A\vec{x}) = A^{-1}\vec{b} \\ \parallel \\ (A^{-1}A)\vec{x} \\ \parallel \\ I_n\vec{x} \\ \parallel \\ \vec{x} \end{array}\right\}$$

Entydig løsning

$$\vec{x}=A^{-1}\vec{b}.$$