Radoperasjoner og determinanter

Teorem: Anta at A er en $n\times n$-matrise.

(i) Dersom A_1 er resultatet av å gange en rad i A med s, så er $\det(A_1) = s\det(A)$

(ii) Dersom A_2 er resultatet av å bytte om to rader i A, så er $\det(A_2) = -\det(A)$

(iii) Dersom A_3 er resultatet av å legge et multiplum av en rad i A til en annen, så $\det(A_3) = \det(A)$.

Bevis for (i): 2×2-matriser $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

To tilfeller: Første rad: $\det\begin{pmatrix} sa & sb \\ c & d \end{pmatrix} = sad - sbc$

$= s(ad-bc) = s\det(A)$

Andre rad

$\det\begin{pmatrix} a & b \\ sc & sd \end{pmatrix} = asd - bsc$

$= s(ad-bc) = s\det(A)$

Induksjonstrinnet: Anta at påstanden gjelder for $n-1$, må vise den for en $n\times n$-matrise A:

Første rad: $\det\begin{pmatrix} sa_{11} & sa_{12} & \cdots & sa_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} =$

$$= sa_{11}A_{11} - sa_{12}A_{12} + \cdots + (-1)^{n+1}sa_{1n}A_{1n}$$

$$= s\underbrace{\left(a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + \cdots + (-1)^{n+1}a_{1n}A_{1n}\right)}_{\det(A)} = s\det(A)$$

i-te rad $(i>1)$:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ sa_{i1} & sa_{i2} & \cdots & sa_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ sa_{i2} & \cdots & sa_{in} \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$- a_{12}\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ sa_{i1} & sa_{i3} & \cdots & sa_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} + \cdots$$

$$= a_{11}sA_{11} - a_{12}sA_{12} + \cdots$$

$$= s\underbrace{\left(a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + \cdots\right)}_{\det A} = \underline{s\det(A)}$$

Vi kan bruke dette til å regne ut determinanten på en ny måte:

$$A \overset{D_1}{\sim} \underline{A_1} \overset{D_2}{\sim} \underline{A_2} \overset{D_3}{\sim} \underline{A_3} \sim \cdots \overset{D_n}{\sim} A_n$$

$$\underbrace{\det(A_n)}_{\substack{\text{trappeform} \\ \text{lett å finne}}} = D_n \cdots D_3 D_2 D_1 \underbrace{\det(A)}$$

$$\det(A) = D_1^{-1} D_2^{-1} D_3^{-1} \cdots D_n^{-1} \det(A_n)$$

Eksempel: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ Finn determinanten!

Radredusere A:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \underset{D_1 = -1}{\overset{I \leftrightarrow II}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \underset{D_2 = 1}{\overset{III + I}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{D_3 = \frac{1}{2}}{\overset{\frac{1}{2} II}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{D_4 = 1}{\overset{III + II}{\sim}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}}$$

$$\det(T) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{5}{2} = \underline{\frac{5}{2}}$$

Altså:

$$\det(A) = D_1^{-1} D_2^{-1} D_3^{-1} D_4^{-1} \cdot \frac{5}{2} = (-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{5}{2} = \underline{\underline{-5}}$$

Teoretiske konsekvenser:

redusert trappeform

$$A \overset{D_1}{\sim} A_1 \overset{D_2}{\sim} A_2 \overset{D_3}{\sim} \cdots \cdots \sim A_n$$

$$\det(A) = \underbrace{D_1^{-1} D_2^{-1} D_3^{-1} \cdots D_n^{-1}}_{\neq 0} \det(A_n)$$

A_n

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A_n) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ - & - & - & - \end{pmatrix} \quad \det(A_n) = 0$$

Konklusjon: $\det(A) \neq 0 \iff$ den redusert trappeformen er I_n

Teorem: Anta at A er en $n \times n$-matrise. Da er følgende ekvivalent:

(i) Den redusert trappeformen til A er I_n

(ii) A er inverterbar.

(iii) $A\vec{x} = \vec{b}$ har løsning for alle $\vec{b}$

(iv) $A\vec{x} = \vec{0}$ har kun løsning $\vec{x} = \vec{0}$.

(v) Søyler i A danner en basis for $\mathbb{R}^n$.

(vi) $\det(A) \neq 0$.

Et nyttig resultat:

Setning: Dersom en matrise A har to rader som er like, så er $\det(A) = 0$.

Bevis: La A' være matrisen vi får, når vi bytter om de to radene. Da er

Men
$$\begin{cases} \det(A') = -\det(A) \\ \det(A') = \det(A) \quad \text{siden de to matrisene er like} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

altså: $\det(A) = 0$.

Determinanter og elementære matriser

1 $\quad I \xrightarrow[\text{rad med } s]{\text{ganger}} E_1$, $\quad \det(E_1) = s$

2 $\quad I \xrightarrow[\text{rader}]{\text{bytter to}} E_2$, $\quad \det(E_2) = -1$

3 $\quad I \xrightarrow[]{\text{legger til mult. av rad}} E_3$, $\quad \det(E_3) = 1$

Setning: Dersom B er en $n\times n$-matrise og E er en elementærmatrise, så er

$$\det(EB) = \det(E)\det(B)$$

Bevis: La s være faktoren til radoperasjonen, da er $\det(E) = s$. Dessuten er EB resultatet av å bruke radoperasjonen på B, så $\det(EB) = s\det(B) = \det(E)\det(B)$.

Spørsmål: Holder formelen $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ for alle $n\times n$-matriser A? JA!

Teorem: For alle $n\times n$-matriser A, B gjelder

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Bevis: To tilfeller:

(i) $\det(A) = 0$: Det betyr at det finnes en $\vec{b}$ slik at $A\vec{x} = \vec{b}$ ikke har løsning. Men da vil heller ikke $AB\vec{x} = \vec{b}$ har en løsning. Det betyr at AB ikke har I_n som redusert trappeform, altså er $\det(AB) = 0$. Altså stemmer

$$\underbrace{\det(AB)}_{0} = \underbrace{\det(A)}_{0}\det(B).$$

$$\boxed{\det(EB) = \det(E)\det(B)}$$

(ii) $\det(A) \neq 0$: Den reduserte trappeformen til A er I, derved $A = E_1E_2\ldots E_n$ der E'ene er elementærmatriser. Dermed er

$$\det(A) = \det(E_1E_2\ldots E_n) = \det(E_1)\det(E_2\ldots E_n) = \det(E_1)\det(E_2)\det(E_3\ldots E_n) = \det(E_1)\det(E_2)\ldots\det(E_n)$$

Samme triks på AB

$$\det(AB) = \det(E_1E_2\ldots E_nB) = \det(E_1)\det(E_2\ldots E_nB)$$
$$= \underbrace{\det(E_1)\det(E_2)\ldots\det(E_n)}_{\det(A)}\det(B) = \det(A)\det(B)$$

Hokus pokus!

Korollar: Dersom A er invertibar, så er

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Bevis:

$$1 = \det(I) = \cancel{\det(\underbrace{AA^{-1}}_{I})} = \det(A)\cdot\det(A^{-1}) \quad |: \det(A)$$

$$\frac{1}{\det(A)} = \det(A^{-1})$$

HURRA!

Transponerte:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & & a_{n2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det(A^T) = \det(A)$$

Nok en smart måte å regne ut determinanter på:

$$|A| = a_{11}A_{11} - a_{12}A_{12} + \dots + (-1)^{n+1} a_{1n}A_{1n}$$

Hva er spesiell med første rad?

Ingen ting.

Ekspansjon etter i-te rad:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} + & - & + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & - & + & \\ + & - & + & - & + & - & \\ - & + & - & + & - & + & \end{matrix} \qquad (-1)^{i+j}$$

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1}A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2}A_{i2} \dots + (-1)^{i+n} a_{in}A_{in}$$

Eksempel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ekspanderer etter andre rad

$$|A| = -0 \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$- (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} ? \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

Ekspansjon etter søyler

$$A = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (-1)^{1+j} a_{1j}A_{1j} + (-1)^{2+j} a_{2j}A_{2j} + \dots + (-1)^{n+j} a_{nj}A_{nj}$$