Inverse matriser (4.5)

En $n \times n$-matrise A kalles invertibar dersom det finnes en matrise B slik

$$AB = BA = I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

I så fall kaller vi B den inverse matrisen til A og skriver $B = A^{-1}$.

Lemma: Hvis A og B er matriser av samme størrelse og

$$A\vec{x} = B\vec{x} \text{ for alle vektorer } \vec{x}, \text{ så er } A = B.$$

Bevis: Det er nok å vise at hvis $A \neq B$, så finnes det en vektor $\vec{x}$ slik $A\vec{x} \neq B\vec{x}$. Siden $A \neq B$, må det finnes et par i, j slik at $a_{ij} \neq b_{ij}$. La $\vec{x} = \vec{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ j-te plass, da er

$$A\vec{e}_j = \begin{pmatrix} \sim \\ \sim \\ a_{ij} \\ \sim \\ \sim \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te komponent}$$

$$B\vec{e}_j = \begin{pmatrix} \sim \\ \sim \\ b_{ij} \\ \sim \\ \sim \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te komponent}$$

$$A\vec{e}_j \neq B\vec{e}_j$$

<u>Setning:</u> Anta at A er en $n\times n$-matrise slik at det finnes en $n\times n$-matrise B slik at $AB = I_n$. Da har matriseligningen $A\vec{x} = \vec{c}$ en entydig løsning for alle $\vec{c}$. Dersom $\vec{c}=\vec{e}_1, \vec{c}=\vec{e}_2, \ldots, \vec{c}=\vec{e}_n$, så er løsningene til $A\vec{x}=\vec{c}$ lik søylene til B.

<u>Bevis:</u> $[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n] = I_n = AB = [A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, \ldots, A\vec{b}_n]$ dvs

$$A\vec{b}_1 = \vec{e}_1, \; A\vec{b}_2 = \vec{e}_2, \ldots, \; A\vec{b}_n = \vec{e}_n$$

La oss se på en generell $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + \cdots + c_n\vec{e}_n$

Sett $\vec{x} = c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \cdots + c_n\vec{b}_n$. Da er

$$A\vec{x} = A(c_1\vec{b}_1 + c_2\vec{b}_2 + \cdots + c_n\vec{b}_n) = c_1A\vec{b}_1 + c_2A\vec{b}_2 + \cdots + c_nA\vec{b}_n$$

$$= c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + \cdots + c_n\vec{e}_n = \vec{c}.$$

Dette betyr at ligningen $A\vec{x}=\vec{c}$ har en løsning for alle $\vec{c}$. Dette betyr at trappeformen til A har pivotelementer i alle rader. Siden A er kvadratisk, betyr dette at det er pivotelementer i alle søyler, som medfører at løsningen til $A\vec{x}=\vec{c}$ er entydig.

<u>Teorem:</u> Anta at A, B er to $n\times n$-matriser slik at $AB = I_n$. Da er $\underbrace{BA = I_n}$, og $B = A^{-1}$ og $A = B^{-1}$.

<u>Bevis:</u> For å vise at $BA = I_n$, er det nok å sjekke at for alle $\vec{x}$, er

$$\underbrace{(BA)\vec{x}}_{\vec{y}} = I_n\vec{x} = \vec{x}$$

Må altså vise at $\vec{y} = \vec{x}$. Sett $\vec{c} = A\vec{x}$, og betrakt

$$A\vec{y} = A((BA)\vec{x}) \underset{\text{assos lov}}{=} (\underbrace{AB}_{I_n})(A\vec{x}) = A\vec{x} = \vec{c}$$

Dermed er $\left.\begin{matrix} A\vec{y} = \vec{c} \\ A\vec{x} = \vec{c} \end{matrix}\right\}$ $\vec{x}$ og $\vec{y}$ er løsninger av samme ligning, og siden løsningen er entydig, må $\vec{x} = \vec{y}$.

<u>Teorem:</u> En $n \times n$-matrise er invertibel hvis og bare hvis ligningen $A\vec{x}=\vec{c}$ har en entydig løsning for alle $\vec{c}$, dvs når den reduserte trappeformen til A er lik I_n

<u>Bevis</u>. Den siste delen viste vi forrige gang, så det holder å vise den første. Vi har bemerket at hvis A har en invers B, så er $AB=I_n$, og dermed har $A\vec{x}=\vec{c}$ en entydig løsning for alle $\vec{c}$. Har $A\vec{x}=\vec{c}$ en løsning for alle $\vec{c}$, så vil matrisen B der søylene er løsninger av $A\vec{x}=\vec{e}_i$ være en invers matrise til A, siden vi da har at

$$AB = [\underbrace{A\vec{b}_1}_{\vec{e}_1}, \underbrace{A\vec{b}_2}_{\vec{e}_2}, \dots, \underbrace{A\vec{b}_n}_{\vec{e}_n}] = I_n$$

Altså er $B=A^{-1}$.

Hvordan finner vi A^{-1} i praksis

Er på jakt etter en matrise B slik at

$$AB=I_n$$

Må løse ligningene

$$\underbrace{A\vec{x}=\vec{e}_1}_{\vec{x}=\vec{b}_1}, \underbrace{A\vec{x}=\vec{e}_2}_{\vec{x}=\vec{b}_2}, \dots, \underbrace{A\vec{x}=\vec{e}_n}_{\vec{x}=\vec{b}_n}$$

$$B=[\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n]$$

$$[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n] = I_n = AB = [A\vec{b}_1, A\vec{b}_2, \dots, A\vec{b}_n]$$

$$[A \mid \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n] \sim [I_n \mid \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n]$$

$$[A \mid I_n] \sim [I_n \mid \underset{A^{-1}}{\underset{\parallel}{B}}]$$

Eksempel: Find den inverse matrix til

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A \mid I_n) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{I \leftrightarrow II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III + I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{(-1)III}{\overset{\substack{I + III \\ II + 2III}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$0 \quad 0 \quad -2 \quad 0 \quad 2 \quad 2$

$0 \quad -2 \quad 0 \quad -2 \quad -4 \quad -4$

$$\overset{I + (-2)II}{\sim} \Bigg(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I_n} \quad \underbrace{\begin{matrix} -2 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{matrix}}_{A^{-1}} \Bigg)$$

Altså:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

MATLAB: inv(A)

$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

$\vec{x} = A \backslash \vec{b}$

$15 <$ 10 : 3gang

5 : 4gang