Egenverdier og egenvektorer

Forelesning: Onsdag
Plenum: Torsdag

Definisjon: Anta at A er en $n\times n$-matrise. En egenvektor for A er en ikke-null vektor $\vec{v}$ slik at $A\vec{v}$ er parallell med $\vec{v}$; dvs at det finnes et tall λ slik at

$$\boxed{A\vec{v} = \lambda\vec{v}}$$

Vi tillater at λ er et komplekst tall og at $\vec{v}$ er en kompleks vektor.

Hva betyr dette? Anta at λ er en egenverdi med egenvektor $\vec{v}$. Da er

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \iff A\vec{v} = \lambda \underbrace{I\vec{v}}_{\vec{v}} \iff \lambda I\vec{v} - A\vec{v} = \vec{0} \iff \underbrace{(\lambda I - A)\vec{v} = \vec{0}}_{\vec{v}\neq\vec{0}}$$

Dette betyr at $\det(\lambda I - A) = 0$.

Metode for å finne egenverdier: Finn de λ slik at $\det(\lambda I - A) = 0$.

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & & & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}$$

Eksempel: $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Finn egenverdiene og egenvektorene.

Finner egenverdiene ved å løse ligningen $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -4 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = 0$

(Hjelperegning:
$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -4 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$)

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -4 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+1) - 4 = \lambda^2 + \lambda - 2\lambda - 2 - 4$$
$$= \lambda^2 - \lambda - 6$$

Løser: $\lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-6)}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} \frac{1+5}{2} = 3 \\ \frac{1-5}{2} = -2 \end{cases}$

Vi har to egenverdier: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$.

Finner egenvektorer for $\lambda_1 = 3$. Må finne vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ slik at $A\vec{v}_1 = 3\vec{v}_1$, dvs

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} 2x + 4y = 3x \\ x - y = 3y \end{matrix}$$

$$\iff \left.\begin{matrix} -x + 4y = 0 \\ x - 4y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 4y\text{, generell } \begin{pmatrix} 4y \\ y \end{pmatrix} \quad y \neq 0$$
$$= y\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Velger $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Egenvektor for $\lambda_2 = -2$: $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ slik at $A\vec{v}_2 = -2\vec{v}_2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} 2x + 4y = -2x \\ x - y = -2y \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 4x + 4y = 0 \\ x + y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x + y = 0,\ x = -y,\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix}, y \neq 0$$
$$= y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Velger: $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Oppsummering:

Egenverdier: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$, egenvektorer $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Vi har en basis av egenvektorer $\vec{v}_1, \vec{v}_2$. For enhver $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, har vi dermed

$$\vec{x} = x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2$$

Vi har dermed

$$A\vec{x} = A(x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2) = x_1 A\vec{v}_1 + x_2 A\vec{v}_2$$
$$= x_1\lambda_1\vec{v}_1 + x_2\lambda_2\vec{v}_2$$

Når har vi en basis av egenvektorer?

Generelt er $\underbrace{\det(\lambda I - A)} = 0$ en n-tegradsligning.

$P(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ er et n-tegradspolynom som kalles det karakteristiske polynomet til A.

Vi vet at $P(\lambda)$ har nøyaktig n løsninger dersom vi tillater at de er komplekse og teller med multiplisitet.

En $n \times n$-matrise kan derfor maksimalt ha n forskjellige egenverdier.

<u>Setning</u>: Egenvektorer med forskjellige egenverdier er lineært uavhengig. Dersom en $n \times n$-matrise har n forskjellige egenverdier, finnes det derfor en basis av egenvektorer.

<u>Bevis</u>: Anta for motsigelse at A har egenvektorer med forskjellige egenverdier som <u>ikke</u> er lineært uavhengige.

La $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ være en minimal slik mengde.

Det finnes tall $c_1, c_2, \ldots, c_k \neq 0$ slik at

$$A \,|\quad c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k = \vec{0} \quad |.$$

$$c_1\lambda_1\vec{v}_1 + c_2\lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\lambda_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

$$\lambda_1 \qquad c_1\lambda_1\vec{v}_1 + c_2\lambda_1\vec{v}_2 + \cdots + c_k\lambda_1\vec{v}_k = \vec{0}$$

Trekker ligningene fra hverandre

$$c_2(\lambda_2-\lambda_1)\vec{v}_2 + c_3(\lambda_3-\lambda_1)\vec{v}_3 + \cdots + c_k(\lambda_k-\lambda_1)\vec{v}_k = \vec{0}$$

Dette betyr at $\vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_k$ er lin. uavh., noe som er en selvmotsigelse siden vi antok at $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ var en <u>minimal</u> lin. uavh. mengde av egenvektorer.

<u>Eksempel</u>: $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ Finn egenverdier og egenvektorer.

Ligningen: $\det(\lambda I - A) = 0$

$$\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda-3 & -4 & 0 \\ -1 & \lambda-3 & 0 \\ 1 & -3 & \lambda-5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda-3 & -4 & 0 \\ -1 & \lambda-3 & 0 \\ 1 & -3 & \lambda-5 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} -1 & \lambda-3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} \lambda-3 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (\lambda-5) \begin{vmatrix} \lambda-3 & -4 \\ -1 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

utvikler etter siste søyle

$$= \underbrace{(\lambda-5)}_{\lambda=5} \underbrace{[(\lambda-3)^2 - 4]}_{(\lambda-3)^2=4}$$

$\lambda = 5 \quad (\lambda-3)^2 = 4$

$\lambda - 3 = \pm 2 = \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$

<u>Røtter</u>: $\lambda_1 = 5$ (multiplisitet 2)

$\lambda_2 = 1$

<u>Egenverdi $\lambda_1 = 5$</u>: Egenvektor $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $A\vec{v}_1 = 5\vec{v}_1$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 5x \\ x + 3y &= 5y \\ -x + 3y + 5z &= 5z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} -2x + 4y &= 0 \\ x - 2y &= 0 \\ -x + 3y &= 0 \end{aligned}$$

Finner alle løsninger ved Gausseliminasjon:

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{-\frac{1}{2}\mathrm{I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathrm{III}+\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mathrm{II} \leftrightarrow \mathrm{III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pivotsøyler z er fri

$$\left.\begin{aligned} x - 2y &= 0 \\ y &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 0, y = 0, z \text{ er fri.}$$

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ der $z \neq 0$

<u>Velger</u>: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>Egenverdi $\lambda_2 = 1$</u>: $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $A\vec{v}_2 = 1 \cdot \vec{v}_2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= x \\ x + 3y &= y \\ -x + 3y + 5z &= z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 2x + 4y &= 0 \iff x + 2y = 0 \\ x + 2y &= 0 \\ -x + 3y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

<u>System</u>:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \underset{\mathrm{III}+\mathrm{I}}{\overset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\mathrm{II} \sim \mathrm{III}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pivot z er fri

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ y + \tfrac{4}{5}z &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ Velger } z: \; y = -\tfrac{4}{5}z, \; x = -2y = \tfrac{8}{5}z$$

<u>Egenvektorer</u>: $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{8}{5}z \\ -\frac{4}{5}z \\ z \end{pmatrix}$ z velges fritt

<u>Velger</u>: $z = 5$

$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

<u>Oppsummerer</u>:

$\lambda_1 = 5$ (multiplisitet 2) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1 \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Hva skjer når egenverdiene er komplekse?

Hvis $\lambda_1 = a + ib$ er en egenverdi, så vil også $\overline{\lambda_1} = (a - ib)$ være en egenverdi.

Hvis $\vec{v}_1$ er en egenvektor for λ_1, så vil $\overline{\vec{v}_1}$ være en egenvektor for $\overline{\lambda_1}$.

konjugerer alle elementer i $\vec{v}_1$.

Eksempel: $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Egenverdier: $|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 5 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$

$$= (\lambda - 3)(\lambda - 1) + 5 = \lambda^2 - \lambda - 3\lambda + 3 + 5 = \underline{\lambda^2 - 4\lambda + 8}$$

Setter lik 0

$$\lambda = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm 4i}{2} = 2 \pm 2i \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 2 + 2i \\ \lambda_2 = 2 - 2i \end{matrix}$$

Egenvektoren til λ_1: $A\vec{v}_1 = (2 + 2i)\vec{v}_1 \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (2 + 2i) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 3x - 5y = 2x + 2ix \\ x + y = 2y + 2iy \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} (1 - 2i)x - 5y = 0 \\ x + (-1 - 2i)y = 0 \;|(1 - 2i) \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} (1 - 2i)x - 5y = 0 \\ (1 - 2i)x - 5y = 0 \end{matrix}\right\} \boxed{y = \frac{1 - 2i}{5}x} - (1 + 2i)$$

Velger $x = 5$: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 - 2i \end{pmatrix}$ egenvektor for $\lambda_1 = 2 + 2i$

Egenvektor for $\lambda_2 = 2 - 2i$:

$$\vec{v}_2 = \overline{\vec{v}_1} = \overline{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 - 2i \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 + 2i \end{pmatrix}$$