Egenvektorer og egenverdier

A $n \times n$-matrise: $\underbrace{A\vec{v}}_{\text{egenvektor}} = \underbrace{\lambda \vec{v}}_{\text{egenverdi}}$

Hvordan finner vi disse? $\underbrace{\det(\lambda I - A) = 0}_{n\text{-te gradsligning}} \Rightarrow$ røttene er egenverdiene.

OBS: Hvis man blir spurt om å vise at $\vec{v}$ er en egenvektor, så regner man bare ut $A\vec{v}$ og sjekker om dette er lik et tall ganger $\vec{v}$.

Husk: 1. Dersom A har n forskjellige egenverdier, så finnes det en basis med egenvektorer for A

2. Komplekse egenverdier kommer i konjugerte par, $\lambda, \bar{\lambda}$. Hvis $\vec{v}$ er en egenvektor for λ, så er $\overline{\vec{v}}$ en egenvektor for $\bar{\lambda}$.

Symmetriske matriser: A er symmetrisk hvis $a_{ij} = a_{ji}$ for alle ij.

Ekvivalent: $A^T = A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 4 \\ -7 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Spektralteoremet: Hvis A er en symmetrisk matrise, så er alle egenverdiene reelle, og det finnes en basis av egenvektorer. Vi kan alltid velge denne basisen ortonormal; dvs

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i \neq j \\ 1 & \text{hvis } i = j. \end{cases}$$

Hva kan dette brukes til?

Matriser brukes til å transformere vektorer:

$\vec{x}_0 \quad \vec{x}_1 = A\vec{x}_0 \quad \vec{x}_2 = A\vec{x}_1 \quad \dots \quad \vec{x}_3 = A\vec{x}_2 \quad \vec{x}_4 = A\vec{x}_3 \dots$

$\uparrow$ tilstand tid 0 $\qquad \uparrow$ tilstand tid 1

Observasjon:

$$\vec{x}_0$$
$$\vec{x}_1 = A\vec{x}_0$$
$$\vec{x}_2 = A\vec{x}_1 = A(A\vec{x}_0) = A^2\vec{x}_0$$
$$\vec{x}_3 = A\vec{x}_2 = A(A^2\vec{x}_0) = A^3\vec{x}_0$$
$$\vdots$$
$$\vec{x}_n = A^n\vec{x}_0$$

$m \times m$

Anta at A har en basis av egenvektorer $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m$ med egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

Skriver starttilstanden $\vec{x}_0$ som en lin. komb. av basiselementene.

$$\vec{x}_0 = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_m\vec{v}_m$$

$$\vec{x}_1 = A\vec{x}_0 = c_1\underbrace{A\vec{v}_1}_{\lambda_1\vec{v}_1} + c_2\underbrace{A\vec{v}_2}_{\lambda_2\vec{v}_2} + \dots + c_m\underbrace{A\vec{v}_m}_{\lambda_m\vec{v}_m} = c_1\lambda_1\vec{v}_1 + c_2\lambda_2\vec{v}_2 + \dots + c_m\lambda_m\vec{v}_m$$

$$\vec{x}_2 = A\vec{x}_1 = A(c_1\lambda_1\vec{v}_1 + c_2\lambda_2\vec{v}_2 + \dots + c_m\lambda_m\vec{v}_m) = c_1\lambda_1^2\vec{v}_1 + c_2\lambda_2^2\vec{v}_2 + \dots + c_m\lambda_m^2\vec{v}_m$$

$$\vdots$$

$$\vec{x}_n = c_1\lambda_1^n\vec{v}_1 + c_2\lambda_2^n\vec{v}_2 + \dots + c_m\lambda_m^n\vec{v}_m, \quad |\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_m|$$

<u>Eksempel</u>: <u>Billepopulasjon:</u>

<u>Nyfødte</u>:	0 uker	Nyfødte $\xrightarrow{100\%}$ Voksne	
<u>Voksne</u>:	1 uke	Voksne $\xrightarrow{50\%}$ Gamle	
<u>Gamle</u>:	2 uker	Gamle $\xrightarrow{0\%}$	

<u>Voksen</u> $\longrightarrow$ 3 nyfødte

<u>Gammel</u> $\longrightarrow$ 4 nyfødte

Etter n uker består populasjonen av

x_n nyfødt

y_n voksne

z_n gamle

$$x_{n+1} = 3y_n + 4z_n$$
$$y_{n+1} = x_n$$
$$z_{n+1} = 0.5y_n$$

$$\vec{r}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \qquad \vec{r}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \vec{r}_n = A\vec{r}_n$$

<u>Finner egenverdiene og egenvektorene til A:</u>

$$0 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -3 & -4 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & -0.5 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ -0.5 & \lambda \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -0.5 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda\left(\lambda^2 - (-0.5)\cdot 0\right) + 1(-3\lambda - 2) = \underline{\lambda^3 - 3\lambda - 2}$$

<u>Inspeksjon</u> $\lambda = 2$ er løsning: <u>Polynomdivisjon</u>

$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 : \lambda - 2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1$$
$$\underline{-(\lambda^3 - 2\lambda^2)}$$
$$2\lambda^2 - 3\lambda - 2$$
$$\underline{-(2\lambda^2 - 4\lambda)}$$
$$\lambda - 2$$

<u>Dermed</u>: $(\lambda^3 - 3\lambda - 2) = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 1)$

$= (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$

<u>Egenverdier</u>: $\underline{\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1}$

Matrise: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, egenverdier: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$

Egenvektor for $\lambda_1 = 2$: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Egenvektor for $\lambda_2 = -1$: $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Dvs:

$$\left.\begin{aligned} 3y + 4z &= -x \\ x &= -y \\ \tfrac{1}{2} y &= -z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x + 3y + 4z &= 0 \\ x + y \quad &= 0 \\ y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{II}-\text{I}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{-\frac{1}{2}\text{II}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \overset{\text{III}-\text{II}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

z fri

$$\begin{aligned} x + 3y + 4z &= 0 & \quad x &= -3y - 4z = 6z - 4z = 2z \\ y + 2z &= 0 & \quad y &= -2z \\ z \text{ fri} & & \quad \text{Velger } z &= 1,\ y = -2,\ x = 2 \end{aligned} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

To egenvektorer: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 2$

$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = -1$

Starttilstand: 24 nyfødt, 0 voksne, 6 gamle, $\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

Spørsmål: Er $\vec{v}_0$ en lin. komb. av $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$?

$$\vec{r}_0 = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 8x + 2y &= 24 \\ 4x - 2y &= 0 \\ x + y &= 6 \end{aligned} \quad \text{Løser} \quad \begin{array}{ccc} -2 & -2 & -12 \\ \hline \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 12 \end{bmatrix}\begin{array}{ccc} -4 & -4 & -24 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -12 \\ 0 & -3 & -12 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} x + y = 6 &\Rightarrow \underline{x = 2} \\ \underline{y = 4} & \end{aligned}$$

Hurra!

$$\vec{r}_0 = 2\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2 \qquad \lambda_1 = 2,\ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\vec{r}_n = 2\lambda_1^n \vec{v}_1 + 4 \cdot \lambda_2^n \vec{v}_2 = \qquad \lambda_2 = -1,\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$2 \cdot \lambda_1^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$

$$= 2^{n+1} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 4(-1)^n \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_n &= 2^{n+1} \cdot 8 + 8(-1)^n \approx 2^{n+1} \cdot 8 \\ y_n &= 2^{n+1} \cdot 4 - 8(-1)^n \approx 2^{n+1} \cdot 4 \\ z_n &= 2^{n+1} + 4(-1)^n \approx 2^{n+1} \cdot 1 \end{aligned}$$

Eksempel: System av diff. lign $x(t), y(t)$

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= \frac{1}{5}x(t) - \frac{1}{20}y(t) \\ y'(t) &= \frac{1}{4}x(t) - \frac{1}{10}y(t) \end{aligned}\right\}$$

Byttedyr: x

Rovdyr: y

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}\,'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{20} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}}_{A} \vec{r}(t) ; \quad \vec{r}\,'(t) = A\vec{r}(t)$$

A har egenverdier $\lambda_1 = \frac{3}{20}, \lambda_2 = -\frac{1}{20}$

egenvektorer $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, bano

$$\vec{r}(t) = c_1(t)\vec{v}_1 + c_2(t)\vec{v}_2$$

$$\vec{r}\,'(t) = c_1'(t)\vec{v}_1 + c_2'(t)\vec{v}_2$$

$$c_1'(t)\vec{v}_1 + c_2'(t)\vec{v}_2 = \vec{r}\,'(t) = A\vec{r}(t) = \overbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{20} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}}^{A} (c_1(t)\vec{v}_1 + c_2(t)\vec{v}_2)$$

$$= c_1(t)\frac{3}{20}\vec{v}_1 + c_2(t)\left(-\frac{1}{20}\right)\vec{v}_2$$

Altså $\underbrace{c_1'(t) = \frac{3}{20}c_1(t)}, \quad \underbrace{c_2'(t) = -\frac{1}{20}c_2(t)}$

$$c_1(t) = Ce^{\frac{3}{20}t}, \quad c_2(t) = De^{-\frac{1}{20}t}$$

Dermed.

$$\vec{r}(t) = c_1(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ce^{\frac{3}{20}t} + De^{-\frac{1}{20}t} \\ Ce^{\frac{3}{20}t} + 5De^{-\frac{1}{20}t} \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 3000 \\ 11000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C + D \\ C + 5D \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} C &= 1000 \\ D &= 2000 \end{aligned}$$