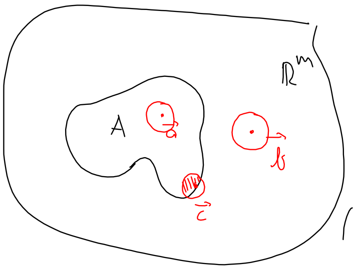
Iterasjon

I kap 4: $\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n$, A en kvadratisk matrise

<u>Mer generelt:</u> $\vec{x}_{n+1} = \vec{F}(\vec{x}_n)$, $\vec{F}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

Mengder og følger i $\mathbb{R}^m$



A er en delmengde av $\mathbb{R}^m$.

Et punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^m$ kalles et <u>indre punkt</u> for A dersom det finnes en kule $B(\vec{a}, r)$ rundt $\vec{a}$ slik at $B(\vec{a}, r) \subset A$.

(Husk: $B(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R} : |\vec{x} - \vec{a}| < r\}$)

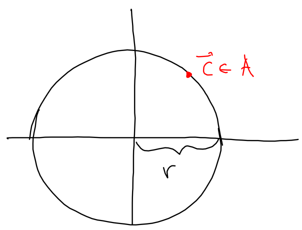
Et punkt $\vec{b} \in \mathbb{R}$ kalles et <u>ytre punkt</u> for A dersom det finnes en kule $B(\vec{b}, r)$ som ikke inneholder noen punkter fra A.

Et punkt $\vec{c} \in \mathbb{R}$ kalles et <u>randpunkt</u> for A dersom enhver kule $B(\vec{c}, r)$ (med $r > 0$) både inneholder punkter som er i A og punkter som ikke er i A.

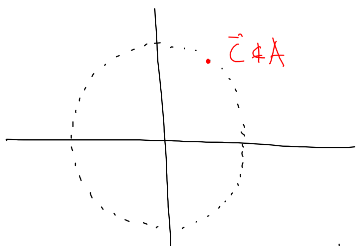
<u>Spørsmål:</u> Er randpunkter med i A?

<u>Svar:</u> Det spørs.

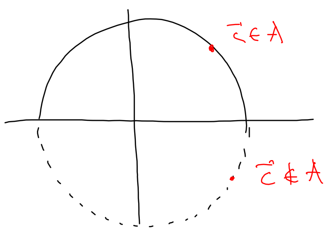
<u>Eks:</u> $A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : |\vec{x}| \leq 1\}$



<u>Eks:</u> $A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : |\vec{x}| < 1\}$



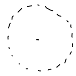
<u>Eks:</u>



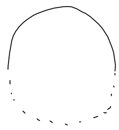
Definisjon: (i) En mengde er lukket dersom den inneholder alle sine randpunkter.

lukket

(ii) En mengde er åpen dersom den ikke inneholder noen av sine randpunkter.



åpen



Hverken åpen eller lukkede.

Konvergens av følger i $\mathbb{R}^m$

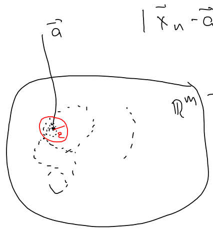
En følge $\{\vec{x}_n\}$ i $\mathbb{R}^m$ er bare en nummerert rekke

$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \dots$ $\quad$ $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$ $\quad$ $\vec{x}_{-3}, \vec{x}_{-2}, \dots$

av elementer i $\mathbb{R}^m$.

Definisjon: Følgen $\{\vec{x}_n\}$ konvergerer mot $\vec{a}$ dersom det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at når $n \geq N$, så er

$$|\vec{x}_n - \vec{a}| < \varepsilon$$



Alternativ definisjon:

$$\vec{x}_n = \begin{pmatrix} x_n^{(1)} \\ x_n^{(2)} \\ \vdots \\ x_n^{(m)} \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a^{(1)} \\ a^{(2)} \\ \vdots \\ a^{(m)} \end{pmatrix}$$

Setning: $\{\vec{x}_n\}$ konvergerer mot $\vec{a}$ hvis og bare hvis

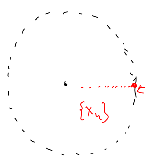
$$\lim_{n\to\infty} x_n^{(i)} = a^{(i)} \quad \text{for } i = 1, 2, 3, \dots, m.$$

Alle de vanlige regnereglene gjelder:

$$\lim_{n\to\infty} \{\vec{x}_n + \vec{y}_n\} = \lim_{n\to\infty} \vec{x}_n + \lim_{n\to\infty} \vec{y}_n$$

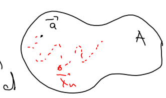
$$\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n \cdot \vec{y}_n = (\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} \vec{y}_n)$$

Setning: Anta at A er en lukket mengde i $\mathbb{R}^m$ og at $\{\vec{x}_n\}$ er en følge fra A ($x_n \in A$) som konvergerer mot $\vec{a}$. Da er $a \in A$.



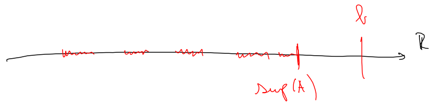
Teorem: Anta at $\vec{F}: A \to \mathbb{R}^k$ er kontinuerlig i punktet $\vec{a} \in A$. Hvis $\{\vec{x}_n\}$ er en følge av punkter i A som konvergerer mot $\vec{a}$, så er $\vec{F}(\vec{a}) = \lim_{n\to\infty} \vec{F}(\vec{x}_n)$.

Omvendt: Hvis $\vec{F}$ ikke er kontinuerlig i $\vec{a}$, så finnes det en følge $\{\vec{x}_n\}$ fra A slik at $\lim_{n\to\infty} \vec{F}(\vec{x}_n)$ ikke er lik $\vec{F}(\vec{a})$ (den trenger ikke engang eksistere)

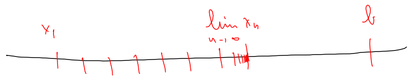


Kompletthet i MAT1100:

Kompletthetsprinsippet: Enhver ikke-tom begrenset delmengde $A \subset \mathbb{R}$ har en minste øvre skranke.



Konsekvens: Enhver voksende, begrenset følge $\{x_n\}$ i $\mathbb{R}$ konvergerer.



Kompletthet i $\mathbb{R}^m$

Anta at vi har en følge i $\mathbb{R}^m$

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \vec{x}_4, \vec{x}_5, \vec{x}_6, \vec{x}_7, \vec{x}_8, \vec{x}_9, \vec{x}_{10}, \vec{x}_{11}, \vec{x}_{12}, \ldots$$

Ny følge

$$\vec{x}_3, \vec{x}_4, \vec{x}_7, \vec{x}_9, \vec{x}_{12}, \ldots \quad \text{Delfølge av } \{\vec{x}_n\}$$

Formelt: Anta at

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$$

er en voksende følge av naturlige tall. Da kalles

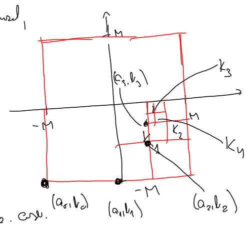
$$\vec{x}_{n_1}, \vec{x}_{n_2}, \vec{x}_{n_3}, \ldots, \vec{x}_{n_k}, \ldots$$

en delfølge av $\{x_n\}$. Vi kan også skrive den $\{\vec{y}_k\}$ der $\vec{y}_k = \vec{x}_{n_k}$

Setning: Hvis $\{\vec{x}_n\}$ konvergerer mot $\vec{a}$, så vil også alle delfølger konvergere mot $\vec{a}$.

Bolzano-Weierstrass' teorem: Enhver begrenset følge $\{\vec{x}_n\}$ i $\mathbb{R}^m$ har en konvergent delfølge. (At $\{\vec{x}_n\}$ er begrenset betyr at det finnes en M slik at $|\vec{x}_n| \leq M$).

Bevis for $\mathbb{R}^2$: Siden $\{\vec{x}_n\}$ er begrenset, finnes det et kvadrat K_0 der alle elementene i følgen ligger. Minst ett av delkvadratene må inneholde uendelig mange ledd, kall dette K_1. Deler vi opp K_1, får vi et nytt kvadrat med uendelig mange ledd, kall dette K_2, osv.



Vi får en sekvens av mindre og mindre bokser

$$K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \ldots$$

som alle inneholder uendelig mange ledd. La (a_n, b_n) være det nedre, venstre hjørnet til K_n. Siden følgene $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ er voksende og begrenset, så konvergerer $a_n \to a$, $b_n \to b$. Vi skal vise at det finnes en delfølge av $\{x_n\}$ som konvergerer mot (a, b).

Fremgangsmåten:

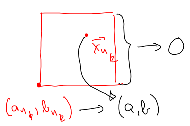
$\vec{x}_{n_1}$ er det første elementet som ligger i K_1.

$\vec{x}_{n_2}$ er det første element etter $\vec{x}_{n_1}$ som ligger i K_2

$\vec{x}_{n_3}$ —— " —— $\vec{x}_{n_2}$ som ligger i K_3.

osv.

Dermed er $\vec{x}_{n_k} \in K_k$. Påstår at $\{x_{n_k}\} \to (a, b)$



QED.

Cauchy-følge CAUCHY

Definisjon: En følge $\{\vec{x}_n\}$ i $\mathbb{R}^m$ kalles en Cauchy følge dersom det for hver $\varepsilon > 0$ finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at hvis $m, k \geq N$, så er $|\vec{x}_m - \vec{x}_k| < \varepsilon$.

Lemma: Enhver konvergent følge er en Cauchy-følge.

Teorem: Enhver Cauchy-følgen i $\mathbb{R}^m$ konvergerer.

Bevisskisse: Viser først at en Cauchy-følge $\{\vec{x}_n\}$ er begrenset. Bruker definisjonen med $\varepsilon = 1$: Det finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at når $n, k \geq N$, så er $|\vec{x}_n - \vec{x}_k| < 1$. Med $k = N$, får vi dermed at

$\underbrace{|\vec{x}_n - \vec{x}_N| < 1}$ for alle $n \geq N$. Dermed er

$$|\vec{x}_n| = |(\vec{x}_n - \vec{x}_N) + \vec{x}_N| \leq |\vec{x}_n - \vec{x}_N| + |\vec{x}_N| \leq |\vec{x}_N| + 1$$

for $n \geq N$.

Dermed er $\{\vec{x}_n\}$: $|\vec{x}_1|, |\vec{x}_2|, \ldots, |\vec{x}_N|, \leq |\vec{x}_N|+1, \leq |\vec{x}_N|+1, \ldots$

Følgen er begrenset av

$$\max\{|\vec{x}_1|, |\vec{x}_2|, \ldots, |\vec{x}_N| + 1\}.$$

Ifølge Bolzano-Weierstrass har $\{\vec{x}_n\}$ en konvergent delfølge $\{\vec{x}_{n_k}\}$. Men hvis en delfølge av en Cauchy-følge konvergerer, så er det lett å se at Cauchy-følgen selv konvergerer til det samme punktet. QED.