Taylorrekker

Taylorpolynomer:

c ligger mellom x og a.

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{\text{Taylorpolynomet av grad } n \text{ i punktet } a} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}_{\text{Restledd. } R_n(x)}$$

Hvis $R_n(x) \to 0$ når $n \to \infty$, så får vi

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}_{\text{Taylorrekken til } f \text{ i punktet } a.}$$

Noen kjente Taylorrekker.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad \text{gjelder for alle } x$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad \text{—"—}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad \text{—"—}$$

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} \quad \text{for } x \in (0,2]$$

Bak manualen!

$$\underline{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

Setning: Anta

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n \quad \text{gjelder i et intervall rundt } c.$$

Da er $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ Taylorrekken til $f(x)$; dvs

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$$

Bevisskisse: Vel

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \dots + a_n(x-c)^n + \dots$$

Ser at: $f(c) = a_0$

Deriverer:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-c) + 3a_3(x-c)^2 + \dots + n a_n (x-c)^{n-1} + \dots$$

$x = c$: $f'(c) = a_1$

Deriverer igjen:

$$f''(x) = 1 \cdot 2 a_2 + 2 \cdot 3 a_3 (x-c) + \dots + (n-1)n a_n (x-c)^{n-2} + \dots$$

$x = c$ $\quad f''(c) = 1 \cdot 2 a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(c)}{1 \cdot 2}$

Deriverer andre en gang:

$$f'''(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 a_3 + \dots + (n-2)(n-1)n a_n (x-c)^{n-3} + \dots$$

$x = c$: $f'''(c) = 1 \cdot 2 \cdot 3 a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f'''(c)}{3!}$

Generelt: $f^{(n)}(c) = 1 \cdot 2 \cdots n a_n \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$

Måter å finne Taylorrekker på:

1. Bruk definisjonen: Finn et generelt uttrykk for $f^{(n)}(a)$, og sett

$$f(x) = \sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \text{(forutsatt at } R_n(x) \to 0\text{).}$$

2. Start med en kjent rekke og manipuler den (f.eks. ved å integrere og derivere den) til vi får det vi ønsker.

Eks: $$\frac{1}{1+x} = \underbrace{1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots}_{\text{geom. rekke}} \qquad |x|<1$$

$$\frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x}$$

Integrerer på begge sider:

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt = \underbrace{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots}_{\text{Taylorrekke til } \ln(1+x)}$$

3. Substitusjon og gange/dele.

Eks: Vi vil finne Taylorrekken til $x^2 e^{-x^2}$

separat $\rightarrow$ tenk hva's e^t

Vi vet at $$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots \quad \underbrace{\text{for alle } t}_{\text{spesielt for } t=-x^2}$$

Dermed $$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \dots + \frac{(-x^2)^n}{n!} + \dots$$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots$$

Ganger med x^2

$$x^2 e^{-x^2} = \underbrace{x^2 - x^4 + \frac{x^6}{2} - \frac{x^8}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n!} + \dots}_{\text{Taylorrekke.}}$$

Eksamen

10 oppgaver / 10 poeng hver. < Kalkulator, formelark } Ovaktyende

MATLAB / Python

Repetisjon

Kjerneregelen og slikt: $\vec{H}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{G}(\vec{x}))$

$$\vec{H}'(\vec{x}) = \vec{F}'(\vec{G}(\vec{x}))\vec{G}'(\vec{x})$$

Spesialtilfelle: $f(\vec{r}(t)) = h(t)$

$$h'(t) = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)$$

Kjerneregelen på komponentform: $f(u_1, u_2, \ldots, u_m)$

$$u_1 = g_1(x_1, \ldots, x_n),\ u_2 = g_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots$$

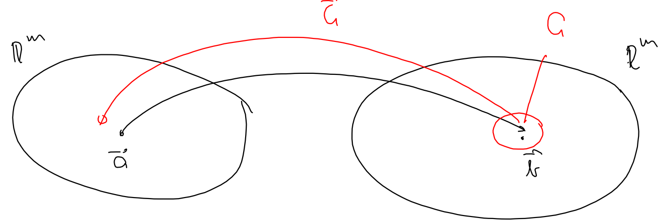
$$h(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial u_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial u_2}\frac{\partial g_2}{\partial x_i} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_m}\frac{\partial g_m}{\partial x_i}$$

Omvendt funksjonsteorem: $\vec{F}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\vec{F}'(\vec{a})$ inverterbar.

Da finnes det en omvendt funksjon $\vec{G}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ definert i en omegn om $\vec{b} = \vec{F}(\vec{a})$ som er deriverbar med

$$\vec{G}'(\vec{b}) = \vec{F}'(\vec{a})^{-1}$$



Implisitt funksjonsteorem: Anta at $f: \mathbb{R}^{m+1} \to \mathbb{R}$ og at $f(\vec{a}, b) = 0$. Dersom $\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}, b) \neq 0$, så finnes det en funksjon g definert i en omegn om $\vec{a}$ slik at $g(\vec{a}) = b$ og $f(\vec{x}, g(\vec{x})) = 0$. Denne funksjonen er deriverbar og

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\vec{a}) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}, b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}, b)}.$$

Kurver

$\vec r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ (kontinuerlig)

Hastighet: $\vec v(t) = \vec r\,'(t)$ Fart: $v(t) = |\vec v(t)|$

Akselerasjon: $\vec a(t) = \vec r\,''(t)$ Baneakselerasjon: $a(t) = v'(t)$

OBS: $a(t) \neq |\vec a(t)|$

Buelengde: $L(a,b) = \int_a^b v(t)\,dt = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \dots + x_n'(t)^2}\,dt$

To typer linjeintegraler:

1 av skalarfelt: $\int_{\mathcal{C}} f\,ds = \int_a^b f(\vec r(t))\,v(t)\,dt$

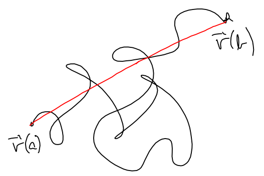
logikk i notasjon $v = \frac{ds}{dt}$

2 av vektorfelt: $\int_{\mathcal{C}} \vec F \cdot d\vec r = \int_a^b \vec F(\vec r(t)) \cdot \vec v(t)\,dt$

logikk i notasjonen $\vec v(t) = \frac{d\vec r}{dt}$

Gradient: $\vec F$ er en gradient når $\vec F = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)$

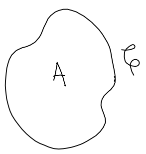
$$\int_{\mathcal{C}} \nabla\varphi \cdot d\vec r = \varphi(\vec r(b)) - \varphi(\vec r(a))$$



Når er $\vec F$ en gradient? Det er nødvendig $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$

men generelt er ikke dette tilstrekkelig. Hvis området er enkeltsammenhengende, er betingelsen også tilstrekkelig.

Greens teorem: $\vec F(x,y) = P(x,y)\,\vec i + Q(x,y)\,\vec j$

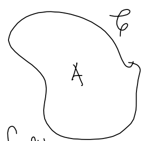


$$\int_{\mathcal{C}} \vec F \cdot d\vec r = \int_{\mathcal{C}} P\,dx + Q\,dy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Eksamenstriks: (i) Hvis dere skal integrere langs en lukket kurve, er integranden sannsynligvis en gradient (alternativt: livet er kjipt).

(ii) Hvis integranden er lukket, skal du kanskje bruke Greens teorem.

Greens teorem og arealer:

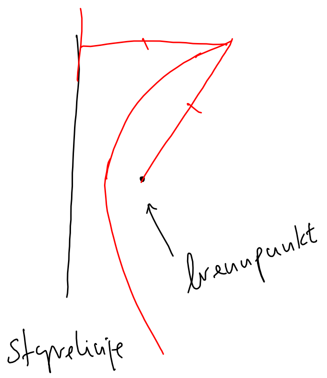


$$A = \int x\,dy = -\int y\,dx = \frac{1}{2}\int x\,dy - \frac{1}{2}\int y\,dx$$

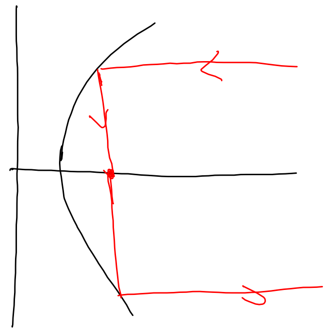
$$= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} (-y\,dx + x\,dy).$$

Kjeglesnitt

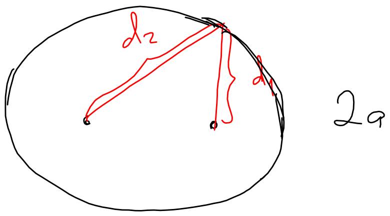
Paraboler, ellipser, hyperbler.



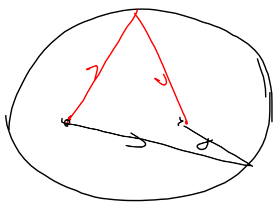
Refleksjon



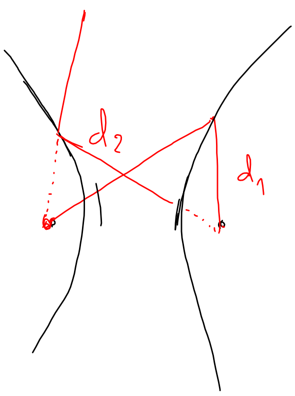
Ellipse:



$$d_1 + d_2 = 2a$$



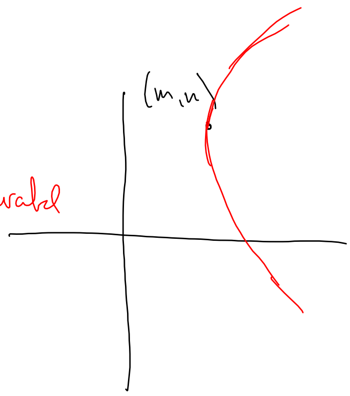
Hyperbel:



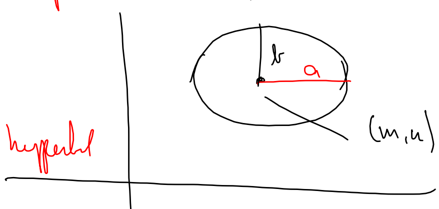
$$|d_1 - d_2| = 2a$$

Formel:

$$(y-n)^2 = 4a(x-m)$$ parabel



$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$ ellipse



$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$ hyperbel

Typisk:

$$4x^2 + 9y^2 - 18x + 16y + 34 = 0$$ Hva slags kjeglesnitt?

(fullfør kvadratene)